



Effet des boucles de quarks légers sur la structure chirale du vide de QCD

Sebastien Descotes-Genon

► To cite this version:

Sebastien Descotes-Genon. Effet des boucles de quarks légers sur la structure chirale du vide de QCD. Physique des Hautes Energies - Expérience [hep-ex]. Université Paris Sud - Paris XI, 2000. Français. NNT : . tel-00002704

HAL Id: tel-00002704

<https://theses.hal.science/tel-00002704>

Submitted on 9 Apr 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ORSAY
N° d'ordre:

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE
présentée
pour obtenir

le grade de DOCTEUR EN SCIENCES
de l'Université de Paris XI Orsay

par

Sébastien Descotes-Genon

Effet des boucles de quarks légers sur la structure chirale du vide de QCD

le 30 Octobre 2000 devant la Commission d'Examen

MM.	P. Binetruy	Président
	G. Martinelli	
	U.-G. Meißner	Rapporteur
	A. Smilga	Rapporteur
	J. Stern	

Groupe de Physique Théorique, Institut de Physique Nucléaire, F-91406 Orsay Cedex, France.

—Unité de Recherche de l'Université Paris XI associée au CNRS—

Table des matières

1	Introduction	1
2	Symétrie chirale et nombre de saveurs légères	5
2.1	La symétrie chirale	5
2.1.1	Le spectre des hadrons	5
2.1.2	Le lagrangien de QCD	6
2.1.3	Courants et charges	7
2.2	Brisure spontanée de la symétrie chirale	9
2.2.1	Réalisation de la symétrie chirale	9
2.2.2	Notion de paramètre d'ordre	10
2.2.3	Paramètres d'ordre chiraux	11
2.2.4	Condensat de quarks et const. de desintégration	13
2.3	Etudes expérimentales	14
2.4	Symétrie chirale et opérateur de Dirac euclidien	15
2.4.1	QCD euclidienne sur un tore	15
2.4.2	Spectre de l'opérateur de Dirac euclidien	17
2.4.3	Paramètres d'ordre dominés par l'infrarouge	19
2.5	Rôle du nombre de saveurs légères	21
2.5.1	Effet paramagnétique des boucles de quarks légers	21
2.5.2	Une sensibilité forte ou faible?	22
2.5.3	Dépendance du condensat de quarks sur N_f	23
2.5.4	Transitions de phase chirales	24
2.6	Inégalités de Weingarten	25
2.7	Résumé	27
3	La théorie de perturbations chirale (χPT)	29
3.1	Théorie effective des champs	29
3.2	Fonctions de Green de QCD	30
3.2.1	Fonctionnelle génératrice de QCD	30
3.2.2	Identités de Ward	31
3.3	Théorie effective de QCD	33

3.3.1	Description des bosons de Goldstone	33
3.3.2	Lagrangien effectif	34
3.3.3	Comptage en puissance	36
3.4	Théories de perturbations chirales	37
3.4.1	$X(N_f) \sim 1$	37
3.4.2	$X(N_f) = 0$	38
3.4.3	Cas intermédiaire	39
3.5	Expansion en masses de quarks	40
3.6	Masses des mésons pseudoscalaires et Σ	41
3.6.1	Rôle de L_6	41
3.6.2	Inégalité paramagnétique pour Σ	47
3.7	Constantes de désintégrations et F^2	49
3.7.1	Rôle de L_4	49
3.7.2	Inégalité paramagnétique pour F^2	51
3.8	Constantes de basse énergie	55
3.9	Conséquences pour la diffusion $\pi\pi$	60
3.10	Résumé	61
4	Etude d'un théorème à basse énergie	63
4.1	Corrélateur de deux densités scalaires	63
4.2	Comportement asymptotique de Π	64
4.3	Contribution pour $0 \leq s \leq s_1$	67
4.3.1	Equations d'Omnès-Muskhelishvili	67
4.3.2	Conditions sur la matrice T	69
4.3.3	Modèles de matrice T	70
4.3.4	Contribution à la règle de somme	74
4.4	Autres intégrales	77
4.4.1	Seconde règle de somme : $s_1 \leq s \leq s_0$	77
4.4.2	Exp. en produit d'opérateurs : $ s = s_0$	78
4.5	Résultats	80
4.5.1	Dérivées logarithmiques des masses	80
4.5.2	Estimation de $X(3)$	84
4.5.3	Constantes de basse énergie	86
4.5.4	Détermination conjointe de $F(3)$ et $X(3)$	90
4.6	Résumé	102
5	Recherche de $n_{\text{crit}}(N_c)$	105
5.1	Fonction de partition à petite masse et grand volume	106
5.1.1	Fonction de partition de QCD euclidienne sur un tore	106
5.1.2	Lagrangien effectif	109
5.2	Comportement dominant des moments inverses à grand volume	110

5.2.1	Correspondance entre QCD et théorie effective	110
5.2.2	$N_f \ll n_{\text{crit}}(N_c)$: règles de somme de Leutwyler-Smilga	112
5.2.3	$N_f > n_{\text{crit}}(N_c)$: la phase avec un condensat de quarks nul	114
5.3	L'approche du point critique	116
5.3.1	Comportement dominant à grand volume	116
5.3.2	Les secteurs topologiquement non-triviaux: $\nu \neq 0$	119
5.3.3	Le secteur topologiquement trivial: $\nu = 0$	121
5.3.4	Conditions de positivité	126
5.4	Corrections sous-dominantes	128
5.4.1	$N_f \ll n_{\text{crit}}(N_c)$	129
5.4.2	Près du point critique	133
5.5	Extraction de constantes de basse énergie	137
5.5.1	Exploiter la dépendance sur le volume	138
5.5.2	Intérêt du rapport \mathcal{Z}_S/Σ^2	139
5.5.3	Application au réseau	139
5.6	Résumé	141
6	Conclusion	143
7	Remerciements	149
A	Rappels	151
A.1	Fermions en métrique euclidienne	151
A.2	Intégration sur les matrices unitaires	152
A.3	Identités de Ward chirales	153
A.4	Lagrangien effectif pour deux saveurs	156
B	Spectre des mésons pseudoscalaires	159
B.1	Constantes de désintégration	159
B.2	Masses	160
B.3	Masses des pseudoscalaires pour $m \rightarrow 0$	162
C	Théorème à basse énergie	163
C.1	Expansion en produits d'opérateurs de Π	163
C.1.1	Intégrales contribuant au coefficient de Wilson	163
C.1.2	Expansion asymptotique	164
C.1.3	Formulaire	168
C.2	Equations d'Omnès-Muskhelishvili	170
C.3	Derivées logarithmiques	172
C.4	Derivées logarithmiques pour $m \neq 0$	174

D Recherche de $n_{\text{crit}}(N_c)$	177
D.1 Coefficients d'expansion de la fonction de partition	177
D.1.1 Coefficient dominant α_ν	177
D.1.2 Coefficients sous-dominants $\beta_\nu, \gamma_\nu, \delta_\nu$	179
D.2 Conditions de positivité près de $n_{\text{crit}}(N_c)$	181
D.2.1 $(\bar{\sigma}_2)^2$ et σ_4	181
D.2.2 σ_6	184
D.3 Régularisation dimensionnelle sur un tore	184
D.3.1 $\sum' 1$	184
D.3.2 $\sum' 1/n^2$	186
Bibliographie	189

Chapitre 1

Introduction

Une question fondamentale et encore irrésolue de la Théorie Quantique des Champs est la dynamique des effets non-perturbatifs. Du fait de la liberté asymptotique des interactions fortes, de tels effets sont essentiels pour l'étude de la Chromodynamique Quantique (QCD) à basse énergie. En dessous de $\Lambda \sim 1$ GeV, le processus d'hadronisation rend inadéquate une analyse en termes de quarks et de gluons, organisée perturbativement en puissances de la constante de couplage fort. Pour de telles énergies, QCD est gouvernée par une symétrie chirale $SU_L(N_f) \otimes SU_R(N_f)$, exacte dans la limite où les N_f quarks légers de la théorie sont de masse nulle. Dans cette limite, la symétrie chirale du lagrangien de QCD est spontanément brisée par l'état fondamental de la théorie [1, 2], ce qui engendre des bosons de Goldstone correspondant aux mesons pseudoscalaires (π, K, η) [3]. La brisure spontanée de la symétrie chirale (*Spontaneous Breakdown of Chiral Symmetry*, SB χ S) régit les interactions fortes dans le domaine non-perturbatif [1, 2].

Malheureusement, nous en savons bien peu sur la structure chirale du vide de QCD, même dans ses aspects les plus élémentaires. Des paramètres d'ordres chiraux permettent de décrire cette structure. L'un d'entre eux est privilégié : il s'agit de F_0 , la constante de désintégration du pion dans la limite $m_u, m_d \rightarrow 0$. En effet, $F_0 \neq 0$ est non seulement une condition suffisante, mais aussi nécessaire pour la SB χ S [5]. La non-nullité des autres paramètres d'ordre ne fournit qu'une condition suffisante à la SB χ S. On suppose couramment que la symétrie chirale est brisée en raison d'une grande condensation quark-antiquark dans le vide $\langle \bar{q}q \rangle$ (le plus simple des paramètres d'ordre chiraux) [2]. Cette hypothèse permet de simplifier l'étude de SB χ S, mais elle n'est pas indispensable pour expliquer la brisure spontanée de la symétrie chirale : cette supposition doit être testée expérimentalement.

La symétrie chirale contraint la dynamique à basse énergie de QCD. Pour analyser les résultats expérimentaux, il est intéressant d'utiliser la méthode

de la théorie effective des champs pour incorporer ces contraintes dans une description de basse énergie des processus mis en jeu. Ces processus correspondent à des corrélateurs de courants vectoriels et axiaux, et de densités scalaires et pseudoscalaires. La théorie effective ainsi obtenue, la Théorie de Perturbations Chirale (χ PT), décrit ces corrélateurs comme des séries en puissances des impulsions mises en jeu et des masses de quarks, avec pour coefficients des combinaisons de paramètres d'ordre chiraux. Si on suppose que la $SB\chi S$ est causée par un grand condensat de quarks, on obtient la χ PT Standard [6], tandis que la χ PT généralisée s'affranchit de cette hypothèse au prix d'une plus grande complexité [5, 7, 9].

Pour étudier le mécanisme de $SB\chi S$, différentes expériences s'intéressent à la diffusion $\pi\pi$ près du seuil, par l'intermédiaire des désintégrations $K_{\ell 4}$ ou de la durée de vie du pionium $\pi^+ - \pi^-$ [10]. Les masses des quarks u et d sont suffisamment petites par rapport aux énergies en jeu. La limite chirale $m_u, m_d \rightarrow 0$ devrait donc être une bonne approximation, et il semble judicieux de faire une expansion des paramètres de l'amplitude $\pi\pi$ en puissances de m_u et m_d . En revanche, il est préférable de laisser au quark étrange sa masse physique. On peut effectivement analyser les données, et obtenir des informations sur la structure chirale du vide dans la limite de $N_f = 2$ saveurs de masse nulle (tandis que m_s conserve sa valeur physique) [11, 12, 13, 14]. Mais ces expériences ne permettent pas de déterminer comment va évoluer la structure chirale du vide quand on passe $N_f = 2$ à $N_f = 3$ saveurs de masse nulle, i.e. quand m_s décroît de sa valeur physique pour atteindre 0. Ainsi, les expériences en cours devraient nous éclairer sur la brisure spontanée de $SU_L(2) \otimes SU_R(2)$, mais pas sur celle de $SU_L(3) \otimes SU_R(3)$.

Il est possible que le mécanisme de $SB\chi S$ soit similaire pour $N_f = 2$ et $N_f = 3$, et que les paramètres d'ordre chiraux soient peu sensibles à N_f . La dépendance sur N_f de ces paramètres d'ordre provient des effets des boucles de quarks légers, qui sont supprimés si on applique la règle de Zweig, et la limite du grand nombre de couleurs [17, 18]. Mais la sensibilité du vide chirale à ces boucles de quarks légers mérite d'être examinée pour plusieurs raisons.

Nous saurons tout d'abord dans quelle mesure les résultats obtenus pour la structure chirale du vide à $N_f = 2$ peuvent être extrapolés à $N_f = 3$. Cela nous indiquera ce que nous ignorons encore du vide chirale dans le secteur $SU_L(3) \otimes SU_R(3)$, et qui restera à analyser par le biais de nouvelles expériences. Sur un plan plus théorique, l'évolution de la $SB\chi S$ avec N_f est un problème complexe. Pour N_f assez grand, on s'attend à voir la symétrie chirale restaurée : le comportement de la fonction β en QCD perturbative suggère en effet une disparition du confinement. Lorsque N_f croît, on s'attend donc à voir apparaître une (ou plusieurs) transitions de phases chirales, menant à la restauration de la symétrie chirale. L'analyse de ces phénomènes

nous permettrait de mieux comprendre la dynamique des théories de jauge non abeliennes.

Un sujet pourrait bénéficier d'une tel approfondissement de notre compréhension : la brisure de la symétrie électrofaible à l'échelle du TeV [19]. A la place d'une théorie comportant des Higgs scalaires élémentaires, faiblement couplés et protégés par la supersymétrie, on peut en effet proposer une brisure dynamique de la symétrie électrofaible. Ces modèles de type Technicouleur incluent une théorie de jauge similaire à QCD, dont la symétrie chirale est spontanément brisée pour $\Lambda_{TC} \sim 2\text{-}3$ TeV. Les bosons de Goldstone ainsi créés brisent alors la symétrie électrofaible grâce à un mécanisme de Higgs dynamique [20]. Pour étudier de tels modèles, on a souvent prétendu que leur mécanisme de $SB\chi S$ pouvait être dérivé directement de celui généralement attribué à QCD (forte condensation quark-antiquark), en supposant une dépendance simple sur le nombre de technicouleurs et de technifermions de la théorie. De telles hypothèses ont amené à affirmer que les modèles de technicouleur étaient en contradiction avec les mesures de précision du Modèle Standard. Mais de telles conclusions seraient remises en question si on constatait par exemple que le condensat de quarks joue un rôle négligeable dans la $SB\chi S$ de QCD, ou que la structure du vide chirale est sensible à N_f , ou bien encore que différentes phases chirales peuvent exister pour différents nombres de saveurs et de couleurs.

La thèse est organisée de la manière suivante. Le Chapitre 2 fait un revue rapide de la $SB\chi S$, et s'intéresse à la dépendance en N_f de certains paramètres d'ordre chiraux. En considérant le spectre de l'opérateur de Dirac en QCD euclidienne, on constate que certains paramètres d'ordre (dont le condensat de quarks et la constante de désintégration pseudoscalaire) doivent décroître quand N_f augmente [21]. Le Chapitre 3 rappelle quelques éléments de la Théorie de Perturbations Chirale, en insistant sur le rôle joué par l'hypothèse d'un grand condensat de quarks. On étudie ensuite les contraintes qu'impose le spectre des mésons pseudoscalaires (π, K, η) sur la structure chirale du vide pour $N_f = 2$ et $N_f = 3$. On constate que les variations de la constante de désintégration pseudoscalaire et du condensat de quarks sont commandées respectivement par les constantes de basse énergie L_4 et L_6 , avec une sensibilité remarquable. Ces constantes de basse énergie sont associées à deux paramètres d'ordre qui violent la règle de Zweig dans le secteur scalaire [22, 23]. Le Chapitre 5 exploite un théorème à basse énergie pour comparer le condensat de quarks pour $N_f = 2$ et $N_f = 3$. Il incorpore des données du secteur scalaire 0^{++} pour fixer L_6 , et aboutit à une forte décroissance de 2 à 3 saveurs légères. Un autre théorème à basse énergie permet de fixer L_4 . Cela suggère que la règle de Zweig est violée notablement quand on étudie les variations du condensat de quarks et de la constante de désintégration pseu-

doscalaire entre $N_f = 2$ et $N_f = 3$ [22, 23]. Cette analyse phénoménologique nous incite à étudier la question plus théorique de l'évolution de la structure chirale du vide lorsque N_f augmente. Le Chapitre 6 se place dans un cadre théorique qui expliquerait naturellement une forte décroissance du condensat de quarks entre 2 et 3 saveurs : trois phases chirales se succèderaient quand on augmente N_f . Dans la première, on aurait brisure de la symétrie chirale avec un condensat de quarks nul. Dans la deuxième, la symétrie chirale serait toujours brisée, mais le condensat de quarks serait nul. La dernière verrait la restauration de la symétrie chirale. Le spectre de l'opérateur de Dirac sur un tore euclidien pourrait être le témoin de ces transitions de phases chirales. Des moments inverses des valeurs propres, convenablement moyennés sur les configurations gluoniques, permettraient de mettre en évidence le passage du premier point critique $n_{\text{crit}}(N_c)$, où le condensat de quarks s'annule [24]. Une application aux simulations sur réseau est proposée, afin d'étudier de telles transitions de phase chirales.

Chapitre 2

Symétrie chirale et nombre de saveurs légères

Aux basses énergies ($\ll 1$ GeV), la dynamique de QCD est gouvernée par la brisure spontanée de la symétrie chirale. Après en avoir rappelé les traits essentiels, nous nous intéresserons à deux de ses paramètres d'ordre : le condensat de quarks et la constante de désintégration pseudoscalaire. Tous deux s'expriment à l'aide des valeurs propres de l'opérateur de Dirac lorsque QCD est considérée sur un tore euclidien. Ils sont plus précisément dominés par la partie infrarouge du spectre. Cela laisse entendre que ces deux paramètres d'ordre devraient être particulièrement sensibles au nombre N_f de saveurs légères de la théorie. Nous discutons certaines implications théoriques et phénoménologiques d'une telle sensibilité [21].

2.1 La symétrie chirale

Si l'on s'intéresse à la Chromodynamique Quantique dans les basses énergies (en-dessous du GeV), l'analyse perturbative en termes de quarks et de gluons est impossible, car ces derniers interagissent fortement et sont confinés sous forme de hadrons. Toutefois, il existe d'autres méthodes, suggérées par le spectre des états liés [25, 27, 28, 29, 30].

2.1.1 Le spectre des hadrons

On constate que les mésons et les baryons peuvent être rassemblés en multiplets quasiment dégénérés en masse. Il existe tout d'abord les multiplets d'isospin comme (n, p) , (π^-, π^0, π^+) , $(\Delta^-, \Delta^0, \Delta^+, \Delta^{++})$... Cette symétrie est très bien vérifiée (on constate des écarts de 5 % environ). Ces multiplets

peuvent être eux-mêmes groupés selon des octets comme (π, K, η) ou des décuplets comme $(\Delta, \Sigma, \Xi, \Omega)$. Les écarts de masse, plus importants, vont de 10 à 30 %. Une symétrie approchée $SU_V(3)$ peut rendre compte de ce spectre, puisque certaines de ses représentations irréductibles se conforment aux octets et décuplets observés.

Par ailleurs, l'octet des mésons légers (pions, kaons, etas) se singularise par des masses inférieures à l'échelle hadronique typique de 1 GeV. Si cet octet était de masse absolument nulle, ses éléments pourraient s'interpréter comme les bosons de Goldstone provenant de la brisure spontanée d'une symétrie continue globale. Un groupe de symétrie résiduel $SU_V(3)$ serait responsable de la dégénérescence du spectre hadronique suivant des octets et des décuplets. L'analyse du lagrangien de QCD va confirmer et préciser cette analyse.

2.1.2 Le lagrangien de QCD

La théorie de la chromodynamique quantiques s'appuie sur un groupe de symétrie local de couleur $SU_C(3)$, généré par les matrices de Gell-Mann T^α ($\alpha = 1 \dots 8$) hermitiennes de trace nulle. Les quarks sont dans la représentation fondamentale de ce groupe, alors que les gluons sont dans la représentation adjointe. Nous pouvons décomposer le lagrangien en 4 termes:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_f, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4}G^{\alpha;\mu\nu}G_{\mu\nu}^\alpha - \frac{g^2}{32\pi^2}\theta \tilde{G}^{\alpha;\mu\nu}G_{\mu\nu}^\alpha, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}_q = \sum_Q \bar{Q}(i\not{D} - M_Q)Q + \sum_q \bar{q}i\not{D}q, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}_m = -m_u\bar{u}u - m_d\bar{d}d - m_s\bar{s}s. \quad (2.4)$$

\mathcal{L}_f contient les termes fixant la jauge gluonique et les fantômes de Fadeev-Popov associés. \mathcal{L}_g rassemble les termes de pure jauge : d'une part l'opérateur cinétique des gluons, et d'autre part un terme topologique où apparaît l'angle du vide θ et le tenseur gluonique dual: $\tilde{G}^{\alpha;\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}G_{\mu\nu}^\alpha/2$. Ce terme topologique viole les invariances par \mathcal{P} et \mathcal{T} . Les contraintes expérimentales (sur le moment dipolaire électrique du neutron, par exemple) imposent un angle du vide θ extrêmement faible [31, 32]. \mathcal{L}_m isole les termes de masse des quarks légers. Les autres termes fermioniques sont rassemblés dans \mathcal{L}_q , où Q désigne les quarks lourds (c, b, t), et q les quarks légers (u, d, s). La dérivée covariante pour les quarks intervient sous la forme $\not{D} = \gamma^\mu D_\mu = \gamma^\mu(\partial_\mu - igG_\mu^\alpha T^\alpha)$.

Dans ce lagrangien, il existe pour chaque saveur de quark une symétrie globale de phase $U(1)$. Mais \mathcal{L}_q possède un groupe de symétrie plus vaste.

Pour le mettre en évidence, on définit les quarks de chiralités gauche et droite par les projections:

$$q_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} q, \quad q_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} q. \quad (2.5)$$

Dans la limite de masse nulle, les notions d'hélicité et de chiralité se confondent et les secteurs légers gauche et droit découplent:

$$\mathcal{L}_q = \sum_Q \bar{Q}(i\not{D} - M_Q)Q + \sum_q \bar{q}_R i\not{D} q_R + \sum_q \bar{q}_L i\not{D} q_L \quad (2.6)$$

On voit donc apparaître le groupe de symétrie chirale: $G = \text{SU}_L(3) \otimes \text{SU}_R(3) \otimes \text{U}_V(1)$. $\text{U}_V(1)$ est un groupe de phase, qui agit identiquement sur les deux chiralités:

$$q_L \rightarrow e^{i\delta} q_L, \quad q_R \rightarrow e^{i\delta} q_R. \quad (2.7)$$

La partie non abélienne de G agit selon sur les triplets de saveurs:

$$\psi_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} \rightarrow V_L \psi_L, \quad \psi_R = \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} \rightarrow V_R \psi_R. \quad (2.8)$$

Au niveau classique, une dernière symétrie apparaît:

$$\psi_L \rightarrow e^{i\delta} \psi_L, \quad \psi_R \rightarrow e^{-i\delta} \psi_R, \quad (2.9)$$

mais le courant de Noether correspondant à cette symétrie axiale $U_A(1)$, $A_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi$, n'est pas conservé au niveau quantique: $\partial^\mu A_\mu = 3g^2/(16\pi^2) \times \tilde{G}^{\alpha;\mu\nu} G_{\mu\nu}^\alpha$.

Notons que le terme de masses légères du lagrangien fermionique, \mathcal{L}_m , mélange les deux chiralités:

$$\mathcal{L}_m = -m_u(\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L) - m_d(\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) - m_s(\bar{s}_L s_R + \bar{s}_R s_L) \quad (2.10)$$

et brise donc explicitement cette symétrie. La limite chirale, où l'on fait tendre la masse des quarks légers vers zéro, amène donc une extension des symétries du lagrangien.

2.1.3 Courants et charges

Nous pouvons définir dans la limite chirale les courants associés au groupe $\text{SU}_L(3) \otimes \text{SU}_R(3)$, et conservés au niveau classique et quantique:

$$(J_L)_\mu^a = \bar{\psi}_L \gamma_\mu \lambda^a \psi_L, \quad (J_R)_\mu^a = \bar{\psi}_R \gamma_\mu \lambda^a \psi_R. \quad (2.11)$$

où apparaissent les générateurs λ^a ($a = 1 \dots 8$) des deux sous-groupes $SU(3)$, normalisés par $\langle \lambda_a \lambda_b \rangle = \delta_{ab}/2$ (la trace sur les indices de saveur est notée $\langle \rangle$). On peut aussi considérer les courants vectoriels et axiaux:

$$V_\mu^a = (J_R + J_L)_\mu^a = \bar{\psi} \gamma_\mu \lambda^a \psi, \quad A_\mu^a = (J_R - J_L)_\mu^a = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \lambda^a \psi. \quad (2.12)$$

Un autre courant conservé provient du groupe $U_V(1)$, en relation avec le nombre baryonique: $V_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$, que l'on peut écrire $V_\mu = V_\mu^0$, en définissant la matrice λ^0 proportionnelle à l'identité (valant $1/\sqrt{6}$).

Les masses de quark brisent explicitement la symétrie chirale, de sorte que les courants vectoriels et axiaux ne sont que partiellement conservés hors de la limite chirale:

$$\partial^\mu V_\mu^a = i\bar{\psi}[M, \lambda^a]\psi, \quad \partial^\mu A_\mu^b = i\bar{\psi}\{M, \lambda^b\}\gamma_5\psi, \quad (2.13)$$

avec M la matrice de masse des quarks légers, $a = 0 \dots 8$ et $b = 1 \dots 8$. On voit apparaître les densités scalaires et pseudoscalaires:

$$S^a = \bar{\psi} \lambda^a \psi, \quad P^b = \bar{\psi} i \gamma_5 \lambda^b \psi, \quad (2.14)$$

$$\partial^\mu V_\mu^a = f^{abc} M^b S^c, \quad \partial^\mu A_\mu^a = d^{abc} M^b P^c, \quad (2.15)$$

avec $M^a = \langle M \lambda^a \rangle$. Ces relations font intervenir les fonctions de structure f^{abc} antisymétriques et d^{abc} symétriques de $SU(3)$:

$$[\lambda_a, \lambda_b] = i f^{abc} \lambda_c \quad \{\lambda_a, \lambda_b\} = \frac{1}{3} \delta^{ab} + d^{abc} \lambda^c \quad (2.16)$$

Si on définit les charges Q_V^a et Q_A^a associées aux courants vectoriels et axiaux, on a les relations de commutation:

$$[Q_V^a, Q_V^b] = i f^{abc} Q_V^c, \quad (2.17)$$

$$[Q_V^a, Q_A^b] = i f^{abc} Q_A^c, \quad (2.18)$$

$$[Q_A^a, Q_A^b] = i f^{abc} Q_V^c. \quad (2.19)$$

Les charges vectorielles Q_V^a ($a = 1 \dots 8$) forment une sous-algèbre, provenant du sous-groupe diagonal $SU_V(3)$. Elles rendent bien compte des dégénérescences du spectre hadronique discutées au début de chapitre.

En revanche, ce même spectre ne montre guère de similitudes avec le groupe de symétrie chirale complet. Par l'opération de parité, on a correspondance entre les charges "gauches" et "droites". Un spectre respectant la symétrie chirale devrait donc comporter, pour chaque multiplet de hadrons, un second multiplet de même masse et de parité opposée.

2.2 Brisure spontanée de la symétrie chirale

2.2.1 Réalisation de la symétrie chirale

La symétrie chirale est réalisée selon le mode de Nambu-Goldstone. Le lagrangien est invariant sous le groupe de symétrie, mais l'état fondamental ne l'est pas, entraînant tout le spectre à sa suite. La symétrie est brisée spontanément, et d'après le théorème de Goldstone [3], le spectre contient autant de particules de masse nulle (bosons de Goldstone) que de directions brisées.

Dans la limite chirale, $G = \text{SU}_L(3) \otimes \text{SU}_R(3) \otimes \text{U}_V(1)$ est brisé spontanément¹:

$$Q_V^a|0\rangle = 0, \quad Q_A^b|0\rangle \neq 0. \quad (2.21)$$

avec $a = 0 \dots 8$ et $b = 1 \dots 8$. L'état fondamental possède un groupe de symétrie résiduel $H = \text{SU}_V(3)$. On aura donc 8 bosons de Goldstone $|\pi^b(p)\rangle$, qui forment un octet selon H :

$$Q_V^a|\pi^b(p)\rangle = if^{abc}|\pi^c(p)\rangle, \quad (2.22)$$

et qui se couplent aux courants axiaux par l'intermédiaire d'une constante de désintégration unique:

$$\langle 0|A_\mu^a(x)|\pi^b(p)\rangle = i\delta^{ab}F(3)p_\mu e^{ip \cdot x}, \quad (2.23)$$

où (3) a été indiquée pour spécifier la limite chirale: $m_u, m_d, m_s \rightarrow 0$.

Des théorèmes généraux existent sur la brisure spontanée de la symétrie chirale. Dans le cadre général de théories de type vecteur (vector-like), Vafa et Witten ont montré que, si l'angle du vide θ est nul, les symétries vectorielles ne pouvaient être brisées [33]. D'autre part, dans une théorie de jauge $\text{SU}_C(3)$ confinante (sans état physique coloré) avec $N_f \geq 3$ fermions, les identités de Ward anormales imposent la brisure de la symétrie chirale (conditions de t'Hooft) [34, 35, 36].

Les théorèmes généraux sur les bosons de Goldstone nous indiquent que ces derniers cessent d'interagir dans la limite de moment nul. En fait on peut retrouver ce résultat en étudiant les processus entre mésons à basse énergie,

1. Cette description n'est pas tout à fait correcte, car $Q_A^b|0\rangle$ n'a pas de norme bien définie. Pour décrire correctement la brisure spontanée de symétrie, il faut faire intervenir un paramètre d'ordre local (ou multilocal) \mathcal{O} , tel que:

$$\langle 0|[\mathcal{O}, Q_V^a]|0\rangle = 0, \quad \langle 0|[\mathcal{O}, Q_A^b]|0\rangle \neq 0. \quad (2.20)$$

en partant de l'algèbre des courants et en lui adjoignant trois hypothèses [25] : (1) les bosons de Goldstone sont les seules particules sans masse présentes dans le spectre des états asymptotiques, (2) aux basses énergies, les fonctions de Green sont dominées par les pôles provenant de l'échange de ces bosons (pôle de pion dominant), et (3) les vertex mettant en jeu ces bosons peuvent être développées en puissances de moments (formule de Taylor). A l'aide de ces hypothèses, on peut déterminer la forme du terme dominant de n'importe quelle interaction. Un raisonnement par récurrence permet de montrer que les interactions entre un nombre quelconque de mésons disparaissent dans la limite de moments nuls.

La Chromodynamique Quantique (confinante) et la théorie (effective) des mésons pseudoscalaires montrent des caractéristiques totalement opposées sur ce point, puisque le couplage des quarks et des gluons augmente lorsque les énergies mises en jeu diminuent.

2.2.2 Notion de paramètre d'ordre

Comment étudier le mécanisme de brisure spontanée de la symétrie chirale ? Une analogie utile est fournie par les systèmes ferromagnétiques. Une phase ordonnée apparaît à basse température. Elle est caractérisée par une aimantation spontanée non nulle résultant d'un alignement macroscopique des spins du système. Au-dessus d'une température critique, l'ordre disparaît et l'aimantation spontanée s'annule.

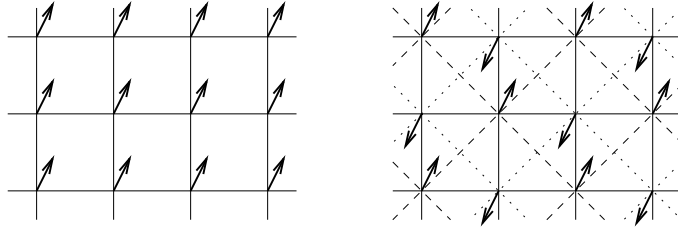


FIG. 2.1 – *Etat fondamental de systèmes de spins ferromagnétique (gauche) et anti-ferromagnétique (droite).*

Les interactions entre spins sont de la forme $\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$. Le hamiltonien de ce système est donc invariant sous une rotation globale $O(3)$. Mais cette symétrie de rotation est brisée par l'état fondamental de la phase ordonnée, puisque l'aimantation spontanée définit un axe privilégié du système. Cette aimantation spontanée se transforme comme un vecteur sous les générateurs de rotations L_i . A température nulle, seul l'état fondamental contribue dans

la moyenne statistique de \vec{M} , et nous avons

$$\langle M_i \rangle_{T=0} = \langle 0 | M_i | 0 \rangle = -\frac{i}{2} \epsilon_{ijk} \langle 0 | [L_j, M_k] | 0 \rangle \quad (2.24)$$

Si $|0\rangle$ est invariant par rotation, il est annihilé par les générateurs de $O(3)$ L_i , et l'aimantation spontanée est nulle. Réciproquement, si l'aimantation spontanée est différente de zéro, l'état fondamental brise la symétrie du hamiltonien. Si \mathcal{O} est un paramètre d'ordre, on a l'implication:

$$\mathcal{O} \neq 0 \Rightarrow \text{Brisure de symétrie.} \quad (2.25)$$

Il existe *a priori* une infinité de paramètres d'ordre. On les obtient en calculant la valeur moyenne dans le vide d'opérateurs qui se transforment selon une représentation (généralement réductible) dont la décomposition en représentations irréductibles ne contient pas la représentation triviale. Mais la réciproque de (2.25) est fausse : la brisure spontanée de symétrie ne contraint pas *l'ensemble* des paramètres d'ordre à acquérir une valeur non-nulle.

Par exemple, dans les systèmes anti-ferromagnétiques, la phase de basse température possède un ordre à longue portée, avec des spins anti-parallèles. Cet ordre brise l'invariance par rotation. Pourtant, l'aimantation spontanée reste nulle. La brisure de symétrie est alors mise en évidence par d'autres paramètres d'ordre (comme la différence des aimantations sur deux sous-reseaux $\vec{M}_{\text{anti}} = \vec{M}_{\text{tirets}} - \vec{M}_{\text{points}}$, cf. Fig. 2.1). La pertinence d'un paramètre d'ordre dépend du mécanisme responsable de la brisure de symétrie. Inversement, l'étude des paramètres d'ordre nous éclaire sur la nature de ce mécanisme.

2.2.3 Paramètres d'ordre chiraux

On peut bâtir différents paramètres d'ordre qui se transforment (dans la limite chirale) sous $SU_L(3) \otimes SU_R(3)$ en excluant la représentation triviale. Certains sont des fonctions de Green des courants A_μ^a , V_μ^a et des densités S^a , P^a , comme :

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T \{ V_\mu^a(x) V_\nu^b(0) - A_\mu^a(x) A_\nu^b(0) \} | 0 \rangle \quad (2.26)$$

Si on note (n_L, n_R) les représentations de $SU_L(3) \otimes SU_R(3)$, Π se transforme (dans la limite chirale) selon (8, 8) pour toute valeur de q .

Plaçons nous dans la limite chirale. Π possède des pôles correspondant aux états à une particule :

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(q) = q_\mu q_\nu \left[- \sum_P \frac{F(3)^2}{q^2} - \sum_V \frac{F_V^2}{M_V^2 - q^2} + \sum_A \frac{F_A^2}{M_A^2 - q^2} \right] + \dots \quad (2.27)$$

où le premier terme provient des bosons de Goldstone, les deuxième et troisième correspondant à des resonances (vectorielles et axiales) massives. A moment nul ($q_\mu = 0$), seuls les bosons de Goldstone contribuent :

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(0) = -\frac{1}{4}g_{\mu\nu}\delta^{ab}F^2(3), \quad (2.28)$$

Nous pouvons utiliser (2.28) comme définition de $F^2(3)$.

Réciproquement, si $F^2(3) \neq 0$, le paramètre d'ordre chirale $\Pi_{\mu\nu}^{ab}(0)$ est différent de 0. L'état fondamental de la théorie est asymétrique. D'après le théorème de Goldstone, le spectre de la théorie contient des états de spin 0 et de masse nulle. Ces états couplent aux courants axiaux car les symétries vectorielles ne peuvent être spontanément brisées [35]. $F^2(3)$ peut alors être identifié à la constante de désintégration des bosons de Goldstone².

$\Pi(0)$ possède donc un statut très particulier parmi les paramètres d'ordre, car l'implication (2.25) est remplacée par l'équivalence :

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(0) \neq 0 \Leftrightarrow F_0 \neq 0 \Leftrightarrow \text{Brisure de la symétrie chirale.} \quad (2.29)$$

A ce titre, F^2 défini par (2.28) pourrait être désigné comme *le* paramètre d'ordre de la symétrie chirale.

Il existe également des paramètres d'ordre locaux, comme le condensat de quarks: $\langle \bar{q}q \rangle^{(3)} = \langle 0|\bar{u}u|0 \rangle^{(3)} = \langle 0|\bar{d}d|0 \rangle^{(3)} = \langle 0|\bar{s}s|0 \rangle^{(3)}$ qui se transforme selon $(3^*, 3) \oplus (3, 3^*)$, le condensat mixte $\langle 0|\bar{q}^i \sigma^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^\alpha T_{ij}^\alpha q_j|0 \rangle^{(3)}$, ou encore certains condensats à quatre quarks de la forme $\langle 0|(\bar{q}\Gamma_1 q)(\bar{q}\Gamma_2 q)|0 \rangle^{(3)}$.

Du fait de la hiérarchie de masse $m_u \sim m_d \ll m_s \ll \Lambda_{\text{QCD}}$, il est également intéressant de s'intéresser à la limite chirale $\text{SU}_L(2) \otimes \text{SU}_R(2)$. Les masses des quarks u et d tendent alors vers zéro, tandis que le quark s conserve sa masse physique. Cette limite est intéressante pour l'étude des pions à très basse énergie. Dans ce cadre, la brisure de symétrie chirale s'analyse à l'aide des paramètres d'ordre de $\text{SU}_L(2) \otimes \text{SU}_R(2)$, qui contiennent une dépendance sur m_s . Notons que dans cette limite, il existe moins de paramètres d'ordre que pour le groupe $\text{SU}_L(3) \otimes \text{SU}_R(3)$. En effet, les représentations 2 et 2^* sont équivalentes. Dès lors, certains produits de ces représentations contiendront la représentation triviale, alors que les mêmes produits pour 3 et 3^* ne la contiennent pas.

2. Le théorème de Goldstone est généralement énoncé pour un opérateur local non-trivial dont la valeur moyenne dans le vide est différente de zéro. En suivant le même raisonnement, l'apparition des bosons de Goldstone peut se prouver dans le cas d'opérateurs qui sont fonctions de points (x_1, x_2, \dots, x_n) localisés dans un volume fini d'espace. On peut en particulier considérer le corrélateur $\langle 0|T\{V_\mu^a(x)V_\nu^b(0) - A_\mu^a(x)A_\nu^b(0)\}|0 \rangle$ à x fini, mais grand. Si la valeur de ce corrélateur est non nulle, il y a bien brisure spontanée de la symétrie chirale, et la contribution des bosons de Goldstone au corrélateur est dominante.

2.2.4 Condensat de quarks et const. de desintégration

Deux paramètres d'ordre jouent un rôle important dans l'étude de la brisure de la symétrie chirale. Nous avons vu que F^2 signalait sans ambiguïté la brisure de la symétrie chirale et sa restauration.

Le condensat de quarks est également un ingrédient essentiel. Il apparaît par exemple dans l'expansion en masses de quarks des masses des mésons pseudoscalaires:

$$F_\pi^2 M_\pi^2 = 2m\Sigma(3) + O(m_q^2), \quad (2.30)$$

$$F_K^2 M_K^2 = (m + m_s)\Sigma(3) + O(m_q^2), \quad (2.31)$$

$$F_\eta^2 M_\eta^2 = \frac{2}{3}(m + 2m_s)\Sigma(3) + O(m_q^2), \quad (2.32)$$

avec le condensat de quarks dans la limite chirale $SU_L(3) \otimes SU_R(3)$: $\Sigma(3) = -\langle 0|\bar{u}u|0\rangle^{(3)}$. Les termes quadratiques en masses de quarks sont notés $O(m_q^2)$, tandis que les effets électromagnétiques et la différence $m_u - m_d$ sont négligés ($m = m_u = m_d$).

Il existe donc une relation entre les masses des mésons pseudoscalaires (qui témoignent de la brisure explicite de la symétrie chirale) et le condensat de quarks dans la limite chirale (qui est un paramètre d'ordre de la brisure spontanée de cette même symétrie). Le condensat de quarks induit une réponse linéaire à la perturbation due aux masses de quarks, comme l'aimantation spontanée des systèmes ferromagnétiques en présence d'un champ extérieur. Le condensat de quarks doit être négatif ou nul, sans quoi les mésons acquerraient des masses négatives pour des masses de quarks très petites (condition de stabilité du vide).

Comment exploiter les expansions (2.30)-(2.32)? On peut, par exemple, supposer que les corrections d'ordre supérieur sont négligeables non seulement dans la limite chirale $m_u = m_d = m_s = 0$, mais également pour les valeurs physiques des masses des quarks légers. On suppose alors que le rapport de Gell-Mann–Oakes–Renner [2]:

$$X(N_f = 3) = \frac{2m\Sigma(3)}{F_\pi^2 M_\pi^2}, \quad (2.33)$$

est proche de 1. Ce rapport mesure le condensat de quarks en unités physiques, puisqu'il étudie la contribution du condensat à la masse du pion. On aboutit à un scénario où la brisure spontanée de la symétrie chirale est causée par une forte condensation de paires quark-antiquark dans le vide: $\langle \bar{q}q \rangle^3 \sim -(230 \text{ MeV})^3$. Dans ce cadre, on peut utiliser les expansions (2.30)-(2.32) pour extraire de M_π et M_K un rapport $r = m_s/m$ de l'ordre de

25. Le condensat de quarks jouerait alors un rôle essentiel pour décrire les conséquences de la symétrie chirale, les autres paramètres d'ordre se limitant à des aspects secondaires du phénomène. Cette vision standard est tout à fait plausible, mais en aucun cas nécessaire : la masse des mésons pourrait provenir en partie, ou même essentiellement, des contributions quadratiques en masses de quarks, de sorte que $X(3)$ serait nettement plus petit que 1.

2.3 Etudes expérimentales

Pour déterminer le mécanisme de brisure de la symétrie chirale, il faut mettre en évidence expérimentalement des effets de brisure explicite de la symétrie chirale. Mais de tels effets seront nécessairement petits, et délicats d'interprétation. Il faut donc mettre en œuvre des expériences de basse énergie, mais de haute précision pour espérer déterminer la structure chirale du vide.

Deux types d'expérience ont été proposées [10] : les désintégrations K_{e4} près du seuil [E865, DAΦNE, NA48] et la durée de vie de l'atome pionique $\pi^+ - \pi^-$ [DIRAC]. Tous deux sont reliés à la diffusion $\pi\pi$ à basse énergie, sans intervention du secteur étrange. Ces expériences vont tester si le scénario standard s'applique dans la limite chirale $SU_L(2) \otimes SU_R(2)$. Un important travail théorique a permis d'étudier les manifestations d'un grand condensat de quarks (pour $N_f = 2$) dans les désintégrations K_{e4} [11] et dans la durée de vie du pionium [12], et d'analyser le premier [13] et le deuxième [14] type d'expériences en gardant le condensat de quarks à deux saveurs comme un paramètre libre.

Il est également possible d'obtenir des informations sur la diffusion $\pi\pi$ en étudiant la production périphérique de dipion $\pi N \rightarrow \pi\pi N$ et $\pi\pi\Delta$ en étudiant des régions cinématiques où l'échange d'un seul pion est le processus dominant [15]. On étudie en fait cette production en fonction du moment de transfert t pour l'extrapoler au pôle du pion [16]. Une telle analyse nécessite toutefois une statistique importante, et recourt à diverses hypothèses au sujet des amplitudes de production. Il faut aussi noter que les contraintes cinématiques rendent difficile l'extraction des déphasages $\pi\pi$ près du seuil. Toutefois, en fournissant les déphasages à des énergies intermédiaires (500 GeV à 2 MeV), ce type d'expérience permet de contrôler les résultats obtenus près du seuil.

Remarquons que QCD peut être considérée dans différents contextes théoriques et/ou expérimentaux (nombre de couleurs et de saveurs, densité, température), où la symétrie chirale n'est pas nécessairement brisée de la même manière. Ainsi, le scénario standard pourrait se réaliser dans certains cas,

mais pas dans d'autres : dans chaque cas, une analyse particulière de la brisure de la symétrie chirale s'impose. Par exemple, la brisure de la symétrie chirale pour $SU_L(2) \otimes SU_R(2)$ et $SU_L(3) \otimes SU_R(3)$ n'a pas forcément la même structure.

2.4 Symétrie chirale et opérateur de Dirac euclidien

2.4.1 QCD euclidienne sur un tore

D'intéressantes propriétés apparaissent pour QCD (à cause sa nature vectorielle) quand on effectue une rotation de Wick afin de passer d'une métrique minkowskienne à une métrique euclidienne :

$$t \rightarrow -ix^0 \quad x^2 = t^2 - \vec{x}^2 \rightarrow -(x^0)^2 - \vec{x}^2 = -x_e^2. \quad (2.34)$$

Cette transformation permet de passer d'un Lagrangien minkowskien \mathcal{L} à un Lagrangien euclidien \mathcal{L}_e :

$$\exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right] \rightarrow \exp \left[- \int d^4x \mathcal{L}_e \right] \quad (2.35)$$

Par exemple, on a pour la théorie ϕ^4 (munie d'une source J)

$$\mathcal{L} = i \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + J\phi \right] \quad (2.36)$$

$$\mathcal{L}_e = - \int d^4x_e \left[\frac{1}{2}(\partial_{e\mu} \phi)^2 + \frac{1}{2}m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 - J\phi \right] \quad (2.37)$$

Ainsi définie, la contrepartie euclidienne de l'action quadratique d'une théorie bosonique est définie positive. La structure analytique des fonctions de Green n'est pas altérée par cette rotation.

Toutefois, la rotation de Wick ne se résume pas à une complexification de la coordonnée temporelle. En effet, les transformations de Lorentz en métrique minkowskienne constituent le groupe $SO(3,1)$, non compact, alors que leurs équivalents euclidiens forment $SO(4)$, qui est compact. La construction d'invariants pour les champs scalaires et vectoriels donne les mêmes résultats dans les deux métriques, car les représentations correspondantes ont des propriétés analogues de covariance, et la complexification naïve de la coordonnée temporelle, telle (2.36)-(2.37) est bien justifiée. Le cas des fermions est évoqué dans l'Appendice A.1.

En particulier, si nous cherchons à bâtir le lagrangien de QCD en métrique euclidienne, nous obtiendrons:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^e = \frac{1}{4} G^{\alpha;\mu\nu} G_{\mu\nu}^\alpha + i \frac{g^2}{32\pi^2} \tilde{\theta} \tilde{G}^{\alpha;\mu\nu} G_{\mu\nu}^\alpha + \bar{\psi}(-i\not{D} + M)\psi. \quad (2.38)$$

Jusqu'à la fin de ce chapitre, nous supposons $\tilde{\theta} = 0$.

Il est également utile de considérer cette théorie euclidienne dans un volume fini, dont nous identifions les bords pour obtenir un tore quadridimensionnel euclidien de taille $L \times L \times L \times L$. QCD est alors un fibré, dont la base est le tore que nous venons de décrire, et la fibre $\text{SU}_C(3)$. La description des champs de jauge se fait de manière générique en recouvrant le tore d'une collection d'ouverts, avec des fonctions de transition décrivant le passage d'un ouvert à un autre sur leur intersection. On peut montrer qu'un seul ouvert suffit pour décrire toute configuration de jauge sur un tore euclidien [89].

Pour le champ gluonique, l'identification entre x et $x + a$ s'effectuera donc directement, à une transformation de jauge près. On demande en revanche l'antipériodicité des champs fermioniques. Ces contraintes de périodicité et d'antipériodicité sur le tore permettent en effet de considérer une théorie des champs euclidienne à volume fini comme un système de mécanique statistique à température finie (la dimension "temporelle" jouant le rôle de l'inverse de la température) [37, 38].

Les conditions de périodicité s'écrivent pour les champs fermioniques et gluoniques:

$$G_\mu(x + a) = \Omega_a G_\mu(x) \Omega_a^\dagger - i \Omega_a \partial_\mu \Omega_a^\dagger \quad (2.39)$$

$$q(x + a) = (-1)^{n_0 + n_1 + n_2 + n_3} \Omega_a(x) q(x), \quad (2.40)$$

avec $a = (n_0, n_1, n_2, n_3) \cdot L$, les $\{n_i\}$ entiers, et $\Omega_a = \Omega_a(x) \in \text{SU}(N_C)$. Ces deux conditions contraignent la fonction de transition:

$$\Omega_{a+b}(x) = \Omega_b(x + a) \Omega_a(x). \quad (2.41)$$

A volume fini, les configurations de jauge peuvent être classées selon un invariant topologique, le nombre d'enroulement:

$$\nu[G] = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \tilde{G}_{\mu\nu}^\alpha G_{\mu\nu}^\alpha, \quad (2.42)$$

dont les valeurs forment un ensemble discret³. Sur le tore, cet invariant topologique peut être réexprimé en terme de la fonction de transition Ω , et la condition (2.41) contraint ν à être entier [89].

3. Pour avoir une action euclidienne finie, le tenseur de force $G_{\mu\nu}$ doit décroître suffisamment vite à l'infini. Le champ gluonique doit donc tendre vers un potentiel de pure

Les fonctions de transition (et donc les champs de jauge) sont contraintes plus sévèrement en présence de champs fermioniques que dans le cas de Yang-Mills pur, en raison de (2.40). En particulier, les configurations de jauge en pure gluodynamique peuvent avoir un nombre d'enroulement fractionnaire de la forme $n/(2N_c)$ (n entier), alors que ce nombre est nécessairement entier en présence de fermions.

2.4.2 Spectre de l'opérateur de Dirac euclidien

Dans la métrique euclidienne, l'opérateur de Dirac $H = \gamma_\mu D_\mu$ est hermitien (car il combine deux opérateurs antihermitiens). Pour chaque configuration de jauge G , cet opérateur peut être diagonalisé :

$$\not{D}\psi_n = \lambda_n \psi_n, \quad (2.43)$$

où $\{\psi_n\}$ forme une base complète d'états orthonormés

$$\int d^4x \psi_n^\dagger(x) \psi_m(x) = \delta_{mn}, \quad \sum_n \psi_n(x) \psi_n^\dagger(y) = \delta^{(4)}(x - y). \quad (2.44)$$

Cette base d'états et le spectre associé sont obtenus pour une configuration gluonique donnée. Remarquons que ce spectre est symétrique autour de 0. En effet, γ_5 et H anticommulent, de sorte que :

$$H\psi_n = \lambda_n \psi_n \Rightarrow H\gamma_5\psi_n = -\gamma_5 H\psi_n = -\lambda_n \gamma_5\psi_n. \quad (2.45)$$

Pour tout vecteur propre ψ_n de valeur propre non nulle, $\gamma_5\psi_n$ est aussi un vecteur propre, de valeur propre $-\lambda_n$. On peut donc classer les valeurs propres strictement positives en une suite croissante (pour $n \geq 1$), et définir pour les indices négatifs $\psi_{-n} = \gamma_5\psi_n$ et $\lambda_{-n} = -\lambda_n$. Dans le sous-espace propre correspondant à $\lambda = 0$, on peut choisir une base constituée d'états propres de la chiralité. Elle comportera n_+ vecteurs droits et n_- vecteurs gauches. Le théorème d'index d'Atiyah-Singer [39] relie la dégénérescence de la valeur propre nulle au nombre d'enroulement du champ gluonique: $\nu = n_+ - n_-$.

Il existe une borne uniforme sur les valeurs propres de l'opérateur de Dirac [35]:

$$|\lambda_n[G]| < C \frac{n^{1/d}}{L} \equiv \omega_n, \quad (2.46)$$

jauge à l'infini: $G_\mu \rightarrow -i(\partial_\mu \omega)\omega^\dagger$. Les champs gluoniques peuvent donc être classés selon la valeur prise par ω dans chaque direction n_μ de l'espace ($n^2 = 1$). Cela constitue une application de la sphère S^3 dans le groupe de jauge. Pour tout groupe de Lie simple G , une telle application possède un nombre infini de classes topologiques, indexées par un entier: $\pi_3(G) = \mathbb{Z}$.

où d est la dimension de l'espace-temps (en l'occurrence $d = 4$) et C est une constante indépendante de la configuration gluonique $G_\mu(x)$, de l'entier n et du volume $V = L^d$ (C varie selon la géométrie d'espace-temps considérée). La borne supérieure ω_n coïncide essentiellement avec la théorie libre (à la constante C près). Notons en particulier que la relation (2.46) implique une accumulation de valeurs propres autour de 0 dans la limite de grand volume.

La borne (2.46) peut être interprétée comme la réponse paramagnétique du spectre de Dirac euclidien soumis à un champ de jauge externe [40]. Une fois un champ appliqué, l'énergie du système "diminue". Ce comportement paramagnétique des fermions s'oppose à celui des scalaires. En effet, le spectre de l'opérateur de Klein-Gordon réagit de façon diamagnétique [41].

Au sein de l'intégrale fonctionnelle, l'intégrale sur les fermions peut être effectuée formellement pour faire apparaître $\det(-i\mathcal{D} + M)$. On peut suivre la même idée en projetant les champs fermioniques sur la base d'états propres que nous venons de définir:

$$q^f(x) = \sum_n a_n^f \psi_n(x), \quad \bar{q}^f(x) = \sum_n \bar{b}_n^f \psi_n^\dagger(x), \quad (2.47)$$

où f est un indice de saveur, et les $\{a_n^f\}$ et $\{\bar{b}_n^f\}$ sont des familles grassmanniennes indépendantes. La base des vecteurs propres $\{\psi_n\}$ est orthonormée, de sorte que le passage des variables $\{q^f, \bar{q}^f\}$ aux variables $\{a_n^f, \bar{b}_n^f\}$ a un jacobien égal à l'unité⁴.

La valeur moyenne dans le vide de \mathcal{Y} s'écrit:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \mathcal{Y} | \Omega \rangle &= \int [dG][d\bar{q}][dq] e^{-S_g[G]} e^{-S_f[G, q, \bar{q}]} \mathcal{Y} \\ &= \int [dG] e^{-S_g[G]} \int \prod_{n,f} d\bar{b}_n^f da_n^f \exp[-\bar{b}_n^f(m_f - i\lambda_n)a_n^f] \bar{\mathcal{Y}}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

où S_g est l'action de Yang-Mills pure et $\bar{\mathcal{Y}}$ correspond à \mathcal{Y} , une fois effectuée la projection des champs fermioniques sur les vecteurs propres de l'opérateur de Dirac. L'intégration sur les variables grassmanniennes fait apparaître un facteur correspondant au déterminant fermionique :

$$\Delta(m|G) = m^{|\nu|} \prod_{n>0} \frac{m^2 + \lambda_n^2[G]}{m^2 + \omega_n^2} \quad (2.49)$$

où on a exploité la symétrie du spectre de l'opérateur de Dirac par rapport à 0, et introduit une normalisation à l'aide des ω_n indépendants de la configuration gluonique. Remarquons que dans le cas d'un angle du vide nul, la

4. Nous ne nous intéresserons pas ici à l'anomalie chirale qui résulte de la non-invariance de la mesure fermionique sous les transformations axiales $U_A(1)$.

mesure constituée de l'action de Yang-Mills et du déterminant fermionique est formellement définie positive.

Dans ce cadre, on peut par exemple exprimer le corrélateur de deux opérateurs bilinéaires de la forme: $\mathcal{O}_i(x) = \bar{\psi}(x)\Gamma_i\psi(x)$, avec Γ_i une combinaison de matrices de Dirac et de matrices de saveur. On obtient de la sorte:

$$\langle \Omega | \mathcal{O}_1(x) \mathcal{O}_2(y) | \Omega \rangle = Z^{-1} \int [dG][d\bar{q}][dq] e^{-S_g[G]} e^{-S_f[G, q, \bar{q}]} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}(x)\Gamma_1\psi(x)\bar{\psi}(y)\Gamma_2\psi(y) \\ &= - \ll \text{Tr}[\Gamma_1 S(x, y|G) \Gamma_2 S(y, x|G)] \gg, \end{aligned} \quad (2.51)$$

où intervient le propagateur des quark légers dans une configuration de jauge donnée:

$$S(x, y|G) = \sum_n \frac{\psi_n(x) \psi_n^\dagger(y)}{M + i\lambda_n}, \quad (2.52)$$

avec M la matrice de masse des quarks légers. La moyenne gluonique $\ll \gg$ est définie comme:

$$\ll \mathcal{O} \gg = \frac{\int [dG] e^{-S_g[G]} \Delta[G] \mathcal{O}}{\int [dG] e^{-S_g[G]} \Delta[G]}. \quad (2.53)$$

Si l'angle du vide est nul, cette moyenne gluonique peut s'interpréter comme une moyenne statistique sur les configurations de jauge, chacune se voyant attribuer le poids (positif) $\Delta[G] \exp(-S_g[G])$.

2.4.3 Paramètres d'ordre dominés par l'infrarouge

On peut procéder de même pour étudier les paramètres d'ordre de la symétrie chirale. Supposons que nous sommes dans la limite chirale $\text{SU}_L(N_f) \otimes \text{SU}_R(N_f)$:

$$m_1 = m_2 = \dots = m_{N_f} = m \rightarrow 0, \quad m_j \neq 0, \quad j > N_f. \quad (2.54)$$

Si nous notons le condensat de quarks dans cette limite $-\Sigma(N_f)$, on obtient:

$$\Sigma(N_f) = \lim \frac{1}{L^4} \ll \int dx \text{Tr} S(x, x|G) \gg_{N_f} \quad (2.55)$$

$$= \lim \frac{1}{L^4} \ll \sum_n \frac{m}{m^2 + \lambda_n^2} \gg_{N_f}. \quad (2.56)$$

où \lim désigne la limite de grand volume $L \rightarrow \infty$, suivie de la limite chirale $\text{SU}(N_f) \times \text{SU}(N_f)$ (2.54). Le symbole $\ll \gg_{N_f}$ représente la moyenne sur les

configurations de jauge, pondérées par le déterminant fermionique et l'action de Yang-Mills pure:

$$\ll \Gamma \gg_{N_f} = Z^{-1} \int d\mu[G] \Gamma \Delta^{N_f}(m|G) \prod_{j>N_f} \Delta(m_j|G) \exp\{-S_g[G]\}. \quad (2.57)$$

Z est un facteur de normalisation pour avoir $\ll 1 \gg_{N_f} = 1$.

On retrouve ainsi la formule de Banks-Casher [42]:

$$\Sigma(N_f) = \lim \frac{1}{L^4} \ll \sum_n \frac{m}{m^2 + \lambda_n^2} \gg_{N_f} \quad (2.58)$$

$$= \lim_{m \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \frac{m}{m^2 + \epsilon^2} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^4} \ll \sum_n \delta(\epsilon - \lambda_n) \gg_{N_f} \quad (2.59)$$

$$= 2 \lim \int_0^{\infty} \frac{du}{1 + u^2} \frac{1}{L^4} \ll \rho(mu) \gg_{N_f}, \quad (2.60)$$

avec ρ la densité de valeurs propres définie par:

$$\rho(\epsilon) = \sum_n \delta(\epsilon - \lambda_n). \quad (2.61)$$

A partir des Eqs. (2.26) et (2.28), on obtient de la même manière pour la constante de désintégration:

$$F^2(N_f) = \lim \frac{1}{L^4} \ll \sum_{k,n} \frac{m}{m^2 + \lambda_k^2} \frac{m}{m^2 + \lambda_n^2} J_{kn} \gg_{N_f}, \quad (2.62)$$

avec:

$$J_{kn} = \frac{1}{4} \sum_{\mu} \left| \int dx \psi_k^{\dagger}(x) \gamma_{\mu} \psi_n(x) \right|^2. \quad (2.63)$$

Comme la base des états propres associée à chaque configuration gluonique est complète, on a $\sum_n J_{kn} = 1$.

On peut voir que ces deux paramètres d'ordre s'intéressent à l'accumulation des valeurs propres autour de 0. On peut en effet les réécrire comme:

$$\Sigma(N_f) = \pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{L \rightarrow \infty} \rho(\epsilon, L), \quad (2.64)$$

$$F^2(N_f) = \pi^2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{L \rightarrow \infty} L^4 J(\epsilon, L) \rho^2(\epsilon, L), \quad (2.65)$$

avec la "densité" et la "mobilité" [43]

$$\rho(\epsilon, L) = \frac{1}{2\epsilon L^4} \ll \sum_n^{\epsilon} \gg_{N_f} = \frac{1}{2\epsilon L^4} N(\epsilon, L), \quad (2.66)$$

$$J(\epsilon, L) = \frac{1}{N^2(\epsilon, L)} \ll \sum_{n,k}^{\epsilon} J_{nk} \gg_{N_f}. \quad (2.67)$$

\sum_n^ϵ désigne la sommation sur les valeurs propres $|\lambda_n| < \epsilon$. Il s'agit bien de paramètres d'ordre : l'interversion des limites de grand volume et de petite masse aboutit à une valeur nulle. Il faut prendre d'abord la limite thermodynamique pour que le spectre de l'opérateur de Dirac devienne assez dense autour de zéro.

$\Sigma(N_f)$ et la constante de désintégration $F^2(N_f)$ ne sont pas sensibles aux mêmes caractéristiques de l'extrémité infrarouge du spectre de l'opérateur de Dirac. En particulier, la comparaison des facteurs $m/(m^2 + \lambda^2)$ et $1/L^4$ dans (2.58) et (2.62) suggère que le condensat de quarks acquiert une valeur non nulle si les valeurs propres s'accumulent en moyenne autour de 0 comme $1/L^4$, alors qu'il suffit d'un comportement en $1/L^2$ pour obtenir $F^2 \neq 0$ [43].

2.5 Rôle du nombre de saveurs légères

2.5.1 Effet paramagnétique des boucles de quarks légers

La moyenne (2.57) montre de manière explicite la dépendance en N_f liée au déterminant fermionique. Pour des paramètres d'ordre dominés par la partie infrarouge du spectre de Dirac, il est intéressant d'isoler cette dernière au sein du déterminant. On choisit un cutoff Λ et on définit l'entier K tel que $\omega_K = \Lambda$ (cette définition est indépendante de la configuration gluonique). On écrit ensuite le déterminant fermionique comme :

$$\Delta(m|G) = m^{|\nu|} \Delta_{\text{IR}}(m|G) \Delta_{\text{UV}}(m|G), \quad (2.68)$$

où on a divisé le spectre de l'opérateur de Dirac en deux parties, infrarouge et ultraviolette. La partie infrarouge s'écrit :

$$\Delta_{\text{IR}}(m|G) = \prod_{n=1}^K \frac{m^2 + \lambda_n^2[G]}{m^2 + \omega_n^2} < 1, \quad (2.69)$$

où la borne provient de l'Eq. (2.46). Cette séparation est bien invariante de jauge : K ne dépend pas de G , et le spectre de l'opérateur de Dirac est invariant sous les transformations de jauge (elles ne font que redéfinir la base des vecteurs propres par rotation).

Dans Δ_{UV} , les valeurs propres λ_n devraient saturer la borne "libre" ω_n . Et les facteurs $\Delta(m_j, G)$ liés aux quarks massifs contiennent une masse lourde m_j non affectée par la limite chirale : ces facteurs ne seront donc pas sensibles aux petites valeurs propres $\lambda \ll m_j$. Pour des paramètres d'ordre dominés par les petites valeurs propres, on s'attend donc à ce que Δ_{IR} joue un rôle

essentiel dans la moyenne (2.57). Ce terme, inférieur à 1 et élevé à la puissance N_f , tend à supprimer ces paramètres d'ordre quand N_f croît [21]:

$$\Sigma(N_f + 1) < \Sigma(N_f) \quad F^2(N_f + 1) < F^2(N_f). \quad (2.70)$$

L'importance de cet effet paramagnétique dépend de la sensibilité de chaque paramètre aux plus petites valeurs propres de l'opérateur de Dirac, dans la limite des grands volumes et des petites masses de quarks. On s'attend donc à observer une suppression plus importante dans le cas de Σ que dans celui de F^2 . Soulignons que cet effet paramagnétique des boucles de quarks légers est ici mis en évidence pour des quantités dominées par les petites valeurs propres de l'opérateur de Dirac. Pour d'autres types d'observables (masse de mésons de type ρ , tension de la corde...), la sensibilité au déterminant fermionique et à N_f peut être faible (et donc se trouver en accord avec la limite du grand nombre de couleurs).

2.5.2 Une sensibilité forte ou faible?

La dépendance des paramètres d'ordre chiraux sur N_f est souvent considérée comme négligeable. Cette dépendance est due aux boucles de quarks légers (dont la somme définit le déterminant fermionique). Or l'effet de ces boucles est supprimé par la règle de Zweig et la limite du grand nombre de couleurs. Toutes deux sont considérées comme de bonnes approximations de QCD (à l'exception éventuelle du secteur anormal 0^{-+}) [17, 18]. De même, la plupart des calculs de QCD sur réseau sont effectués dans l'approximation “quenched” (négligeant les boucles de quarks légers), et sont en accord raisonnable avec les données expérimentales [44].

Il faut toutefois modérer ces affirmations générales. Si on considère la fonction β en QCD perturbative [45], on s'attend à observer des transitions de phases chirales pour N_f/N_c assez large [46]. Par ailleurs, la limite de grand N_c n'est pas une approximation satisfaisante dans le secteur scalaire 0^{++} : on n'y observe pas les nonets idéalement mélangés $\bar{q}q$ requis par la règle de Zweig [47]. De plus, certaines simulations avec des fermions dynamiques suggèrent que la brisure de la symétrie chirale serait fortement dépendante du nombre de saveurs légères [48, 49].

Différentes approches ont été proposées pour étudier d'éventuelles transitions liées à l'augmentation de N_f . L'étude de la fenêtre conforme de QCD [50], où la théorie est asymptotiquement libre dans l'ultraviolet, mais présente un point fixe infrarouge non-trivial, suggère une restauration de la symétrie chirale pour $N_f \sim 10$ (à $N_c = 3$). L'étude d'équations de “gap” dans la même fenêtre abouti à une limite légèrement différente [51], avec une valeur critique

de N_f au-dessus de 12. Par ailleurs, le modèle du liquide d'instantons [54] indique que les instantons ne contribuent pas à la brisure de la symétrie chirale pour $N_f > 6$ [52]. De telles études suggèrent que la structure chirale du vide pourrait dépendre fortement du nombre de saveurs légères de la théorie.

2.5.3 Dépendance du condensat de quarks sur N_f

Considérons une théorie avec N_f quarks légers de même masse m tendant vers 0. Les autres quarks restent massifs. Supposons que le plus léger d'entre eux, noté s , a une masse non nulle, mais petite par rapport à l'échelle de la théorie. QCD correspond au cas $N_f = 2$. $\Sigma(N_f)$ est une fonction de m_s , et sa dérivée est:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m_s} \Sigma(N_f) &= \lim_{m \rightarrow 0} \int dx \langle \bar{u}u(x) \bar{s}s(0) \rangle^c \equiv \Pi_Z(m_s) \\ &= \lim \frac{1}{L^4} \ll \left(\sum_k \frac{m}{m^2 + \lambda_k^2} \right) \left(\sum_n \frac{m_s}{m_s^2 + \lambda_n^2} \right) \gg_{N_f}^c, \end{aligned} \quad (2.71)$$

où c indique la composante connexe. Puisque $\Sigma(N_f)$ tend vers $\Sigma(N_f + 1)$ quand $m \rightarrow 0$, on a

$$\Sigma(N_f) = \Sigma(N_f + 1) + \int_0^{m_s} d\mu \Pi_Z(\mu) = \Sigma(N_f + 1) + m_s \mathcal{Z}_s(m_s) + O(m_s^2 \log m_s). \quad (2.72)$$

On voit apparaître un troisième paramètre d'ordre, à côté du condensat de quarks Σ et de la constante de désintégration F^2 : le corrélateur Π_Z qui viole la règle de Zweig dans le secteur scalaire⁵.

Remarquons que le canal 0^{++} joue ici un rôle privilégié, car il possède les nombres quantiques du vide. La variation d'un paramètre d'ordre chirale entre N_f et $N_f + 1$ sera donnée par une fonction de corrélation qui viole la règle de Zweig dans le canal 0^{++} . Une forte variation correspondrait à des états scalaires, singlets de $SU(N_f)$, fortement couplés aux N_f premiers quarks et à la densité scalaire $\bar{s}s$. Une telle variation justifierait ainsi que le spectre des états 0^{++} n'est pas dominé par des mésons scalaires idéalement mélangés [47].

5. Π_Z est un paramètre d'ordre pour $SU_L(N_f) \otimes SU_R(N_f)$, tandis que le corrélateur:

$$\lim_{m \rightarrow 0} \int dx e^{iq \cdot x} \langle \bar{u}u(x) \bar{s}s(0) \rangle^c \quad (2.73)$$

à $q^2 \neq 0$ est un paramètre d'ordre pour $SU_L(N_f) \otimes SU_R(N_f)$ et $SU_L(N_f + 1) \otimes SU_R(N_f + 1)$.

2.5.4 Transitions de phase chirales

Normalement, la différence $\Sigma(N_f) - \Sigma(N_f + 1)$ donnée par (2.72) devrait être petite pour deux raisons. D'abord, elle est supprimée dans le comptage chirale car m_s est petit devant le condensat $\Sigma(N_f)$ (à condition que ce dernier soit de taille "standard"). De plus, le corrélateur $\langle \bar{u}u \bar{s}s \rangle$ est supprimé dans la limite de grand N_c . Si on constate un écart important entre $\Sigma(N_f)$ et $\Sigma(N_f + 1)$, cela signifie que ces deux arguments (validité du comptage chirale standard et limite du grand N_c) sont mis en défaut. Il existe en particulier une situation où une forte dépendance du condensat de quarks sur le nombre de saveurs légères trouverait une explication naturelle.

Imaginons que nous puissions librement augmenter le nombre de saveurs légères N_f . Si Σ est plus sensible à la suppression due aux boucles de quarks, il pourrait s'annuler avant F^2 . On aurait alors trois phases. Pour $N_f < n_{\text{crit}}(N_c)$, la symétrie chirale est brisée, et le condensat de quarks n'est pas nul. Pour $n_{\text{crit}}(N_c) \leq N_f \leq N_{\text{crit}}(N_c)$, la symétrie chirale est toujours brisée, mais le condensat de quarks est nul⁶. Enfin, au-dessus de $N_{\text{crit}}(N_c)$, la symétrie chirale est restaurée. Bien que Σ semble plus sensible à N_f que F^2 , il se pourrait aussi que les deux transitions soient confondues, de sorte que l'annulation du condensat corresponde à la restauration de la symétrie chirale. L'argument qualitatif de décroissance des paramètres d'ordre ne permet pas de quantifier cet effet.

Néanmoins, dans le cadre d'un scénario à 3 phases, une forte variation de $\Sigma(N_f)$ s'expliquerait naturellement juste en dessous du point critique $n_{\text{crit}}(N_c)$ où le condensat de quarks s'annule. Prenons la théorie avec N_f saveurs, où N_f est défini par $N_f + 1 < n_{\text{crit}}(N_c) < N_f + 2$. Dans ce cas, $\Sigma(N_f + 1)$ n'est pas nul, mais il est déjà petit. D'après (2.60), un condensat petit marquerait la suppression de la densité moyenne d'états $\ll \rho(\lambda) \gg_{N_f} / L^4$ pour $\lambda \sim m$. A proximité d'une transition de phase, il est également naturel de voir augmenter les fluctuations de cette densité d'états et/ou les corrélations densité-densité $\ll \rho(\lambda)\rho(\lambda')^c \gg_{N_f} / L^4$ pour $\lambda \sim \lambda' \sim m$. Or Π_Z est justement relié à cette corrélation:

$$\Pi_Z(m_s) = 4 \lim \int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} \frac{dv}{1+v^2} \frac{1}{L^4} \ll \rho(mu)\rho(m_s v) \gg_{N_f}^c. \quad (2.74)$$

Un peu en dessous du point critique $n_{\text{crit}}(N_c)$, la diminution de la densité d'états et l'augmentation des corrélations densité-densité pourraient amener

6. Cette transition pourrait être liée à une extension du groupe de symétrie résiduelle, telle que: $\text{SU}_L(N_f) \otimes \text{SU}_R(N_f) \rightarrow \text{SU}_V(N_f) \times Z_A(N_f)$. En effet, la symétrie axiale discrète $Z_A(N_f)$ impose la nullité de certains paramètres d'ordre chiraux, dont Σ .

une compétition entre les deux premiers termes dans l'expansion (2.72) en puissances de m_s [21].

Il est intéressant d'étudier la limite du grand N_c dans le cadre du scénario à trois phases. Les boucles de quarks sont supprimées, et les paramètres d'ordre chiraux deviennent indépendants de N_f . Le point critique $n_{\text{crit}}(N_c)$, où Σ s'annule, tendrait donc vers l'infini dans cette limite⁷. L'expansion en $1/N_c$ convergerait donc lentement à proximité du point critique, et serait incapable d'étudier correctement la phase au-dessus de $n_{\text{crit}}(N_c)$.

2.6 Inégalités de Weingarten

Un argument a été avancé contre l'existence d'une phase intermédiaire $\Sigma = 0$, $F^2 \neq 0$ en QCD [55]. Considérons (en métrique euclidienne) le corrélateur des courants axiaux:

$$\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(0) \rangle \leq \int d\mu \text{Tr} [S(x, 0|m) \gamma_\mu \gamma_5 \lambda_a S(0, x|m) \gamma_\nu \gamma_5 \lambda_b], \quad (2.75)$$

avec $S(x, 0|m)$ le propagateur fermionique des N_f quarks légers, et $d\mu$ la mesure gluonique qui inclut le déterminant fermionique. Supposons qu'il existe une régularisation de cette mesure telle que $d\mu$ est bien positive (telle qu'elle semble l'être naïvement en métrique euclidienne). On peut dans ce cas écrire:

$$\begin{aligned} |\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(0) \rangle| &\leq \int d\mu |\text{Tr} [S(x, 0|m) \gamma_\mu \gamma_5 \lambda_a S(0, x|m) \gamma_\nu \gamma_5 \lambda_b]| \quad (2.76) \\ &\leq \int d\mu \text{Tr} [S(x, 0|m) \gamma_5 \lambda_a S(0, x|m) \gamma_5 \lambda_b] = \langle P_0^a(x) P_0^b(x) \rangle. \end{aligned}$$

La deuxième inégalité vient de l'inégalité de Cauchy-Schwartz: $|\text{Tr}(UV^\dagger)|^2 \leq \text{Tr}(UU^\dagger) \text{Tr}(VV^\dagger)$, appliquée à la trace sur les indices spinoriels. On utilise le fait que $\gamma_\mu^\dagger = -\gamma_\mu$ et $S^\dagger(x, 0|m) = \gamma_5 S(0, x|m) \gamma_5$ en métrique euclidienne. On a noté P_0^a la densité pseudoscalaire nue. L'inégalité pour des quantités renormalisées sera de la forme:

$$|\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(0) \rangle| \leq Z(\mu) \langle P^a(x) P^b(0) \rangle, \quad (2.77)$$

où x , μ , ν , a et b sont libres, et $Z(\mu)$ est le facteur de renormalisation associé aux masses de quark: $m_0 = Z^{-1/2}(\mu) m(\mu)$.

7. Un tel comportement serait en accord avec les calculs perturbatifs où N_f et N_c apparaissent seulement sous la forme du rapport N_f/N_c .

Dans la limite chirale, le corrélateur pour les courants axiaux est toujours dominé (à grande distance) par la contribution des bosons de Goldstone:

$$\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(0) \rangle \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} F^2(N_f) \delta^{ab} \frac{1}{2\pi^2} \frac{g_{\mu\nu} x^2 - 4x_\mu x_\nu}{x^6}. \quad (2.78)$$

Le couplage des pions aux densités pseudoscalaires P_0^a est proportionnel à M_π^2/m_0 . Si $\Sigma_0(N_f) = 0$, les pions ne couplent pas aux densités pseudoscalaires dans la limite chirale: $\langle 0 | P_0^a | \pi^b \rangle = 0$. On aura donc le comportement à grande distance:

$$\langle P_0^a(x) P_0^b(0) \rangle \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{g_0^2}{4\pi^2} \delta^{ab} \frac{e^{-M|x|}}{x^2}, \quad (2.79)$$

où M est masse de la particule la plus légère couplant à P_0 avec le couplage g_0 (cette particule n'est pas un boson de Goldstone). A très grande distance, l'inégalité de Weingarten (2.77) sera violée: aucune loi de puissance ne pourra battre la décroissance exponentielle du corrélateur pseudoscalaire.

Nous avons donc l'implication $F^2(N_f) \neq 0 \Rightarrow \Sigma_0(N_f) \neq 0$, qui semble éliminer l'éventualité d'une phase intermédiaire, avec un condensat de quarks nul et brisure de la symétrie chirale. Mais nous avons considéré des quantités nues telles que P_0 et Σ_0 . Il n'est pas clair que l'argument survive, une fois accomplie la renormalisation de la théorie (et en particulier celle du condensat de quarks). Il s'agit ici d'effectuer une régularisation et une renormalisation non perturbatives, préservant la symétrie chirale et conservant la positivité de la mesure gluonique (incluant le déterminant fermionique).

Supposons que nous régularisons la théorie nue à l'aide d'un coupure ultraviolette Λ (en préservant la symétrie chirale). Nous aurons:

$$\Sigma_r(\mu) = Z^{-1/2} \Sigma_0^\Lambda, \quad Z^{1/2}(\mu, \Lambda) = \frac{m_r}{m_0} \quad (2.80)$$

Que se passe-t-il quand la coupure ultraviolette $\Lambda \rightarrow \infty$? Si on admet l'expression perturbative de Z , on a pour grand Λ :

$$Z = \left[\frac{\alpha_s(\mu)}{\alpha_s(\Lambda)} \right]^{8/\beta_0}, \quad \beta_0 = 11 - \frac{2}{3} N_f. \quad (2.81)$$

Pour QCD, $\beta_0 > 0$ et $Z \rightarrow \infty$ quand on fait tendre le cut-off vers l'infini. D'après (2.80), la valeur de Σ_r dépend du comportement asymptotique de Σ_0^Λ . Si Σ_0^Λ diverge comme Z quand $\Lambda \rightarrow \infty$, Σ_r est une constante non-nulle. Si Σ_0^Λ ne diverge pas (ou pas suffisamment vite), Σ_r est nul.

L'argument de [55] montre que $F^2(N_f) \neq 0 \Rightarrow \Sigma_0(N_f) \neq 0$ pour tout Λ . Mais il n'impose rien pour le comportement asymptotique de Σ_0^Λ dont dépend la validité de l'implication $\Sigma_0(N_f) \neq 0 \Rightarrow \Sigma^r(N_f) \neq 0$. Pour savoir

si l'implication $F^2(N_f) \neq 0 \Rightarrow \Sigma_r(N_f) \neq 0$ est vraie ou non, il faudrait donc connaître le comportement du condensat sous la renormalisation. Sans cette dernière étape du raisonnement, on ne peut malheureusement pas savoir si les inégalités de Weingarten excluent ou non une phase avec brisure de la symétrie chirale et condensat de quarks nul.

2.7 Résumé

La brisure de la symétrie chirale régit QCD aux basses énergies. On peut la décrire à l'aide de paramètres d'ordre chiraux. Deux d'entre eux jouent un rôle privilégié : le condensat de quarks Σ (paramètre d'ordre le plus simple) et la constante de désintégration pseudoscalaire F^2 (signal non ambigu de la brisure de symétrie chirale). La hiérarchie de masse $m_u, m_d \ll m_s \ll \Lambda_H \sim 1$ GeV incite à considérer deux limites chirales différentes. La première consiste à garder m_s à sa masse physique alors que $m_u, m_d \rightarrow 0$. Cette limite de $N_f = 2$ saveurs sans masse est en particulier utile pour analyser la diffusion $\pi\pi$ près du seuil. La seconde limite est celle de $N_f = 3$ saveurs de masse nulle : m_u, m_d et m_s tendent vers 0.

On peut donc s'interroger sur le rôle du nombre de saveurs légères : la structure chirale du vide évolue-t-elle de façon importante quand N_f augmente ? On s'attend à une restauration de la symétrie chirale pour N_f très grand, ce qui suggère une sensibilité du vide aux boucles de quarks légers. En revanche, la règle de Zweig et la limite du grand nombre de couleurs militent contre une forte sensibilité.

Pour étudier cette question, on peut s'intéresser au spectre de l'opérateur de Dirac \not{D} dans un tore euclidien. En effet, le mécanisme de brisure de la symétrie chirale est reflétée par l'accumulation des petites valeurs propres autour de 0 quand le volume du tore tend vers l'infini. En particulier, certains paramètres d'ordre chiraux, comme $\Sigma(N_f)$ et $F^2(N_f)$ sont dominés par ces petites valeurs propres. On constate que le déterminant fermionique tend à supprimer de tels paramètres, et que cet effet est d'autant plus important que N_f est grand. Σ et F^2 devraient donc être des fonctions décroissantes de N_f .

La rapidité de cette décroissance peut se mesurer à l'aide de paramètres d'ordre chiraux, violant la règle de Zweig dans le secteur scalaire 0^{++} . Or on sait que ce secteur ne vérifie pas bien la règle de Zweig et la limite du grand nombre de couleurs. Des paramètres d'ordre chiraux tels que Σ et F^2 pourraient donc dépendre fortement de N_f .

Par ailleurs, Σ et F^2 ne sont pas sensibles au même type d'accumulation des valeurs propres autour de 0 quand le volume du tore tend vers

l'infini. Σ pourrait ainsi décroître plus rapidement que F^2 . Cela suggère le scénario, plus spéculatif, de deux transitions de phases chirales successives quand N_f augmente. Nous partons d'une phase où le condensat de quarks est non nul (et la symétrie chirale est brisée). Quand N_f augmente, Σ diminuerait plus rapidement que F^2 et s'annulerait pour une valeur critique $n_{\text{crit}}(N_c)$. La constante de désintégration serait encore différente de zéro, et ne s'annulerait que plus tard, pour une deuxième valeur critique $N_{\text{crit}}(N_c)$. La phase $n_{\text{crit}}(N_c) < N_f < N_{\text{crit}}(N_c)$ a un condensat de quarks nul, mais la symétrie chirale est toujours brisée puisque $F^2(N_f) \neq 0$. C'est seulement une fois passé $N_{\text{crit}}(N_c)$ que la symétrie chirale est restaurée.

Ce scénario offre d'intéressantes caractéristiques au voisinage du point critique $n_{\text{crit}}(N_c)$. En effet, $\Sigma(N_f)$ peut s'interpréter comme la densité de valeurs propres de l'opérateur de Dirac, tandis que la différence $\Sigma(N_f + 1) - \Sigma(N_f)$, liée à la violation de la règle de Zweig dans le secteur scalaire, correspond à la corrélation entre les valeurs propres. Au voisinage d'un point critique, on s'attend à voir la densité d'états diminuer et les fluctuations augmenter. Une forte décroissance du condensat entre 2 et 3 saveurs pourrait ainsi s'expliquer par le fait que $n_{\text{crit}}(N_c)$ est proche de 3, et fournirait une explication à la violation de la règle de Zweig dans le secteur 0^{++} .

Ce scénario n'est qu'un schéma possible pour ces transitions de phases chirales. On peut également imaginer qu'il n'y a pas de phase intermédiaire avec brisure de la symétrie chirale et condensat de quarks nul. Notons en particulier que les inégalités de Weingarten semblent interdire une telle phase. Toutefois, ces inégalités comparent des quantités se comportant différemment sous le groupe de renormalisation, et elles permettent de tirer des conclusions seulement pour des quantités nues. La traduction de ces conclusions en termes de quantités renormalisées semble particulièrement ardue, car elle nécessite la renormalisation non-perturbative du condensat de quarks. Les inégalités de Weingarten seules ne permettent donc pas d'exclure le scénario à 3 phases.

Chapitre 3

La théorie de perturbations chirale (χ PT)

Pour étudier la brisure de la symétrie chirale, on peut bâtir une théorie effective des champs de QCD. La théorie ainsi obtenue permet d'écrire l'expansion de fonctions de Green en puissance des impulsions et des masses de quarks, en considérant que les masses de quarks sont de petites perturbations autour de la limite chirale. D'où son nom de Théorie des Perturbations Chirale (Chiral Perturbation Theory ou χ PT). Pour organiser cette double expansion en puissance d'impulsions et de masses de quarks, il est utile de savoir si le condensat de quarks est pertinent ou non pour décrire la brisure spontanée de la symétrie chirale. A l'aide de cette théorie effective, on peut développer en puissances de masses de quarks différentes observables du spectre des mésons pseudoscalaires. Ceci permet de comparer la structure chirale du vide pour $N_f = 2$ et $N_f = 3$. On constate une forte corrélation entre le condensat à 2 saveurs et le rapport de masses de quarks m_s/m . Une violation de la règle de Zweig dans le secteur scalaire (liée à L_6) autoriserait une forte décroissance du condensat de 2 à 3 saveurs légères. Une étude analogue est menée sur les constantes de désintégration pseudoscalaires. Le spectre des mésons pseudoscalaires fournit des bornes sur Σ et F^2 pour $N_f = 2$ et $N_f = 3$ [22, 23].

3.1 Théorie effective des champs

Nous voulons réexprimer une théorie (la Chromodynamique Quantique) dans un domaine d'énergie où ses degrés de liberté (les quarks et les gluons) semblent perdre de leur pertinence. Il s'agit d'un problème très général de la physique : si l'on veut faire des calculs à basse énergie dans le cadre d'une

théorie connue à haute énergie, mais complexe, il vaut mieux se ramener à une théorie approchée, simplifiée, une théorie effective [25, 26, 27, 28, 29]. Si nous effectuons des expériences à des énergies de plus en plus élevées, nous verrons apparaître de nouveaux degrés de liberté, et certains champs perdront leur statut fondamental pour être envisagés comme des états liés. Inversement, si nous baissons les énergies des processus, certains degrés de liberté disparaissent du spectre accessible de la théorie.

Nous cherchons à bâtir une théorie valable à basse énergie, en appliquant le programme de la théorie quantique des champs : isoler les degrés de liberté pertinents, déterminer les symétries qui les régissent, puis bâtir la théorie des champs la plus générale correspondante. Puisque nous effectuons une expansion à basse énergie des fonctions de Green de la théorie, nous allons bâtri une tour de lagrangien contribuant chacun selon une puissance $(E/\Lambda)^k$ aux différentes observables. Nous allons organiser la construction de la théorie de basse énergie pour des k croissants, et en nous arrêtant à une certaine précision (i.e. à une puissance donnée, sans quoi la tâche serait sans fin). Une telle expansion en puissances successives des moments devrait donner des résultats intéressants quand on considère les mésons pseudoscalaires qui cessent d'interagir à moment nul (dans la limite chirale).

La théorie effective invoquera des opérateurs de degrés de plus en plus élevés et sera non-renormalisable (au sens ancien du terme), mais nous verrons que ceci n'est pas un problème le cadre de la théorie effective des champs. Lorsque le niveau de précision requis augmentera, elle incorporera de plus en plus de paramètres, inconnus puisque nous ne sommes pas capable de suivre le programme de Wilson jusqu'à son terme. Ceci peut paraître peu encourageant : une théorie effective ne peut prétendre calculer précisément un vaste ensemble de processus en se limitant à un nombre restreint de paramètres. En revanche, elle décrit quantitativement de quelle manière ces processus sont reliés les uns aux autres en raison des symétries qu'elle incorpore. Elle organise notre connaissance (et notre ignorance) théorique pour analyser au mieux les données expérimentales.

3.2 Fonctions de Green de QCD

3.2.1 Fonctionnelle génératrice de QCD

Dans le cas de QCD, nous voulons donc bâtir une théorie effective, dont les degrés de libertés seront les mésons pseudoscalaires (π, K, η) , et qui rendra compte de la symétrie chirale. A l'aide de cette théorie, nous étudierons des processus en calculant des fonctions de Green constituées de courants

vectoriels, axiaux et de densités scalaires et pseudoscalaires. On peut dériver l'ensemble des fonctions de Green connexes à partir de leur fonctionnelle génératrice:

$$e^{i\Gamma[v,a,s,p,\theta]} = \langle \Omega | T \exp \left\{ i \int d^4x \bar{\psi} [\gamma^\mu (v_\mu + \gamma_5 a_\mu) - (s - i\gamma_5 p)] \psi - \frac{g^2}{32\pi^2} \theta \tilde{G}^{\alpha;\mu\nu} G_{\mu\nu}^\alpha \right\} | \Omega \rangle_{\tilde{\theta}=0}, \quad (3.1)$$

où v, a, s, p, θ sont des sources classiques. Pour obtenir les fonctions de Green (pour calculer des interactions entre mésons, par exemple), on dérivera Γ par rapport à ces sources, puis on prendra $v = a = s = p = 0$ et $\theta = \theta_0$. On peut la réécrire comme une intégrale fonctionnelle:

$$\begin{aligned} e^{i\Gamma[v,a,s,p,\theta]} &= \int [DG][D\psi][D\bar{\psi}] \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{QCD}} \right\}_{\theta=0} \\ &\quad \times \exp \left\{ i \int d^4x \bar{\psi} [\gamma^\mu (v_\mu + \gamma_5 a_\mu) - s + \gamma_5 p] \psi - \frac{g^2}{32\pi^2} \theta \tilde{G}^{\alpha;\mu\nu} G_{\rho\sigma}^\alpha \right\} \\ &= \int [DG][D\psi][D\bar{\psi}] \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{QCD}}[v, a, s, p, \theta] \right\}, \quad (3.3) \end{aligned}$$

avec le lagrangien de QCD, muni de sources:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}}[v, a, s, p, \theta] &= \mathcal{L}_f + \sum_Q (i\mathcal{D} - M_Q)Q \\ &\quad - \frac{1}{4} G^{\alpha;\mu\nu} G_{\mu\nu}^\alpha - \frac{g^2}{32\pi^2} \theta \tilde{G}^{\alpha;\mu\nu} G_{\mu\nu}^\alpha \\ &\quad + \sum_q \bar{\psi} [\gamma^\mu (iD_\mu + v_\mu + \gamma_5 a_\mu) - \tilde{s} + \gamma_5 p] \psi, \end{aligned} \quad (3.4)$$

où $\tilde{s}(x) = s(x) + M$, avec M la matrice de masse des quarks légers. En fait, dans cette dernière expression, nous remplaçons \tilde{s} par s , et nous évaluerons les différentes dérivées de la fonctionnelle génératrice en $v = a = p = 0$, $s = M$ et $\theta = \theta_0$.

3.2.2 Identités de Ward

Nous voulons bâtir une théorie effective, dont les seuls degrés de liberté seront les mésons pseudoscalaires U , et qui satisfasse aux contraintes de la

symétrie chirale. On aura la fonctionnelle génératrice effective:

$$e^{i\Gamma_{\text{eff}}[v,a,s,p,\theta]} = \int [dU] \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}}[U, v, a, s, p, \theta] \right\}. \quad (3.5)$$

La symétrie chirale apparaîtra alors sous la forme d'identités de Ward reliant différentes fonctions de Green.

Cette exigence peut être exprimée très simplement dans le cadre de la fonctionnelle génératrice. L'ensemble des identités de Ward peut être reexprimé en exigeant que Γ est invariant sous les transformations locales (dépendant de l'espace-temps) des sources externes $\mathcal{S} = v, a, s, p$:

$$\Gamma[\mathcal{S}'] = \Gamma[\mathcal{S}], \quad \mathcal{S}' = T(g)\mathcal{S}, \quad (3.6)$$

avec $g(x) \in \text{SU}_L(N_f) \otimes \text{SU}_R(N_f)$ et $T(g)$ sa représentation pour \mathcal{S} . D'après l'Appendice A.3, les transformations infinitésimales des sources seront de la forme:

$$v'_\mu = v_\mu + \partial_\mu \alpha + i[\alpha, v_\mu] + i[\beta, a_\mu], \quad (3.7)$$

$$a'_\mu = a_\mu + \partial_\mu \beta + i[\alpha, a_\mu] + i[\beta, v_\mu], \quad (3.8)$$

$$s' = s + i[\alpha, s] - \{\beta, p\}, \quad (3.9)$$

$$p' = p + i[\alpha, p] + \{\beta, s\}, \quad (3.10)$$

avec $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ deux matrices hermitiennes (de trace nulle) correspondant à des rotations respectivement vectorielle et axiale.

On voudrait inclure dans ce cadre les fonctions de Green contenant les courants singlets axial et vectoriel. Il faut pour cela s'intéresser à des transformations de $\text{U}_L(N_f) \times \text{U}_R(N_f)$ ($\langle \alpha \rangle \neq 0$ and $\langle \beta \rangle \neq 0$). La présence d'identité de Ward anormales modifie alors (3.6) et nécessite un traitement particulier, détaillé dans l'Appendice A.3. Cela donne lieu à la transformation de la source correspondant à l'angle du vide:

$$\theta'(x) = \theta(x) - 2\langle \beta(x) \rangle. \quad (3.11)$$

Il faut scinder Γ en deux parties:

$$\Gamma[\mathcal{S}] = \Gamma^0[\mathcal{S}] + \Gamma^{WZ}[\mathcal{S}], \quad (3.12)$$

où Γ^{WZ} s'occupe des anomalies¹ et Γ^0 la solution générale de l'équation d'invariance:

$$\Gamma^0[\mathcal{S}'] = \Gamma^0[\mathcal{S}], \quad (3.13)$$

1. Il s'agit en fait de trouver une solution particulière de (A.31).

Tout lagrangien satisfaisant aux identités de Ward de la symétrie chirale (détaillées dans l'Appendice A.3) vérifiera la décomposition (3.12). Wess et Zumino [56], puis Witten [57] ont construit explicitement un lagrangien qui tient compte de l'anomalie, est fonction de U , v_μ et a_μ) et permet d'écrire Γ^{WZ} . Reste à construire la solution générale Γ^0 .

3.3 Théorie effective de QCD

3.3.1 Description des bosons de Goldstone

En QCD, le groupe de symétrie chirale G agit selon:

$$q_R \xrightarrow{g} V_R q_R, \quad q_L \xrightarrow{g} V_L q_L. \quad (3.14)$$

La théorie effective s'intéressera aux bosons de Goldstone, qui se transformeront selon une représentation de G :

$$\phi^a \xrightarrow{g} \theta^a(g, \phi). \quad (3.15)$$

Il s'avère que la représentation θ est contrainte de manière très stricte par la loi de composition [25]:

$$\theta(g_1, \theta(g_2, \phi)) = \theta(g_1 g_2, \phi). \quad (3.16)$$

Nous pouvons commencer par définir le sous-groupe qui laisse stable l'origine: $H = \{h, \theta(g, 0) = 0\}$. Remarquons que $\theta(gh, 0) = \theta(g, 0)$ pour tous $g \in G$ et $h \in H$. $\theta(g, 0)$ est donc une application de l'espace-quotient G/H obtenu en identifiant dans G les éléments g et g' tels que $g' = gh$ avec $h \in H$. Cette application de G/H dans G est inversible: si $\theta(g_1, 0) = \theta(g_2, 0)$, on a $g_1 g_2^{-1} \in H$, donc g_1 et g_2 correspondent au même élément de G/H . On peut donc identifier les champs des bosons de Goldstone aux coordonnées de l'espace quotient G/H .

Choisissons dans chaque classe d'équivalence $\{gh, h \in H\}$ un représentant n , de façon à décomposer de manière unique tout élément de G comme $g = nh$. La loi de composition (3.16) montre que l'image n' de n sous l'action de $g \in G$ s'obtient en décomposant le produit gn en $n'h$, ce qui correspond à l'action de G sur G/H . Ici, $G = \text{SU}_L(N_f) \otimes \text{SU}_R(N_f)$ et $H = \text{SU}_V(N_f)$, donc $g = (V_R, V_L)$, tandis que H est constitué des paires (V, V) . Nous pouvons choisir comme élément représentatif de chaque classe $n = (U, \mathbf{1}) \in G/H$. La loi de transformation s'exprime comme:

$$gn = (V_R, V_L)(U, \mathbf{1}) = (V_R U, V_L) = (V_R U V_L^\dagger, \mathbf{1})(V_L, V_L) = n'h. \quad (3.17)$$

On voit donc que les bosons de Goldstone se transforment selon:

$$U'(x) = V_R U(x) V_L^\dagger. \quad (3.18)$$

On peut choisir n'importe quelle paramétrisation des coordonnées pour la matrice unitaire U , comme $U = \exp[i \sum_{a=1}^{N_f^2-1} \phi_a \lambda^a / F(N_f)]$. On écrit dans le cas $N_f = 3$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \phi_a \lambda^a = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Remarquons que (3.18) s'étend sans difficulté aux transformations locales $V_R(x)$ et $V_L(x)$. En revanche, si nous voulons inclure les courants singlets axial et vectoriel dans notre analyse, les rotations chirales " $U_A(1)$ " ($\langle \beta \rangle \neq 0$) nécessitent un ajustement du formalisme, car elles ne respectent pas la contrainte $\det U(x) = 1$ [6]. On doit remplacer cette contrainte par:

$$\det U(x) = e^{-i\theta(x)}, \quad (3.20)$$

de façon à satisfaire (3.18) pour tout élément de $U_L(N_f) \times U_R(N_f)$. Notre écriture en terme des champs de mésons pseudoscalaires conserve sa validité, à condition de multiplier la matrice (3.19) par une phase $\exp(-i\theta(x)/N_f)$.

3.3.2 Lagrangien effectif

Nous cherchons un lagrangien effectif, fonction des bosons de Goldstone et non plus des quarks et des gluons, qui vérifie les mêmes identités de Ward que QCD. D'après la Sec. 3.2.2, ces identités seront vérifiées si et seulement si l'action est invariante sous une transformation de jauge des sources, modulo un terme décrivant les identités de Ward anormales. Nous allons donc chercher l'expression la plus générale de $\mathcal{L}_{\text{eff}}[U, \mathcal{S}]$, telle que:

$$e^{i\Gamma^0[\mathcal{S}]} = \int [DU] \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}}[U, \mathcal{S}] \right\}, \quad (3.21)$$

avec Γ^0 invariant sous les transformations locales de \mathcal{S} . La mesure $[DU]$ étant elle-même invariante sous ces transformations, on doit donc déterminer le lagrangien effectif le plus général invariant sous les transformations locales des sources et de la matrice des mésons, et dépendant de U , θ , v_μ , a_μ , s , p , ainsi que leurs dérivées.

On introduit donc les dérivées covariantes:

$$D_\mu U = \partial_\mu U - i(v_\mu + a_\mu)U + iU(v_\mu - a_\mu), \quad (3.22)$$

$$D_\mu \theta = \partial_\mu \theta + 2\langle a_\mu \rangle, \quad (3.23)$$

et les tenseurs de courbures, associés à a_μ et v_μ et possédant les bonnes propriétés de covariance [6]:

$$F_{\mu\nu}^I = \partial_\mu F_\nu^I - \partial_\nu F_\mu^I - i[F_\nu^I, F_\mu^I] \quad (I = R \text{ ou } L), \quad (3.24)$$

$$F_\mu^R = v_\mu + a_\mu, \quad F_\mu^L = v_\mu - a_\mu. \quad (3.25)$$

Puisque nous cherchons une action invariante, nous pourrions envisager le cas plus général d'une densité de lagrangien invariante à une divergence totale près. Mais un théorème d'invariance pour les lagrangiens effectifs relativistes [26] montre qu'au prix d'un changement de coordonnées dans U , on peut toujours se ramener à la recherche d'une densité de lagrangien strictement invariante. En outre, on peut montrer que tout lagrangien effectif invariant sous les transformations chirales est bien construit uniquement à partir des champs et de leurs dérivées covariantes. Nous avons donc toutes les briques pour construire notre lagrangien effectif.

On peut en outre utiliser le fait que s, p, θ n'ont pas des lois de transformation indépendantes. La matrice de masses de quarks est diagonalisable, de valeurs propres réelles positives. Par une transformation chirale judicieuse, on peut toujours se ramener à:

$$s + ip = M, \quad \theta \rightarrow s = \mathcal{M}, \quad p = 0, \quad \theta = \bar{\theta}, \quad (3.26)$$

où M est la matrice de masse de quarks dans une base quelconque, et \mathcal{M}_q est une matrice diagonale, de valeurs propres réelles positives m_u, m_d, m_s . On voit apparaître l'angle du vide invariant: $\bar{\theta} = \theta + \arg \det(s + ip)$. Ainsi, $\Gamma[s, p, \theta]$ dépend seulement des valeurs propres de la matrice de masse et de l'angle du vide invariant $\bar{\theta}$. Inversement, cette transformation nous permet de fixer $\theta = 0$, au prix d'une rotation sur la matrice de masse:

$$s + ip = M_q, \quad \theta \rightarrow s + ip = M \exp(i\theta/N_f), \quad \theta = 0. \quad (3.27)$$

Il suffit de considérer la situation (plus simple) où l'angle du vide est identiquement nul. $U(x)$ appartient alors à $SU(N_f)$. Une fois obtenu le lagrangien effectif, on remplace M par $M \exp(i\theta/N_f)$ et $\langle a_\mu \rangle$ par $(D_\mu \theta)/2$ pour tenir compte de la source associée à $\tilde{G}G$ [58]. Nous ne considérerons pas ici de fonctions de Green contenant $\tilde{G}G$ ou A_μ^0 . On peut donc poser $\langle a_\mu \rangle = 0$ et θ constante. L'étude de Γ à angle du vide quelconque se ramène alors à celle à $\theta = 0$.

3.3.3 Comptage en puissance

Le lagrangien effectif est constituée d'un nombre infini de termes, puisqu'il est possible de construire une infinité d'invariants à l'aide des briques élémentaires que nous avons évoquées. Nous désirons calculer différents processus hadroniques pour des énergies basses, dont nous savons qu'ils possèdent une forme analytique de limite nulle pour des moments extérieurs nuls.

Si q est le moment externe typique intervenant dans un processus, l'ordre dominant sera donné (par exemple) par q^2 , auquel on ajoutera des corrections en q^3 , puis en q^4 ... On tronquera le lagrangien jusqu'à la puissance de q désirée, $\mathcal{L}_{\text{eff}} = \sum \mathcal{L}_n$, où \mathcal{L}_n contient *tous* les termes invariants sous les transformations chirales contribuant à l'ordre q^n . Le problème devient fini, à condition de se limiter à une puissance fixée des moments externes.

Mais outre les vertex contribuant en arbre aux processus, les pions peuvent aussi intervenir sous forme de boucles, qui doivent être incluses, sous peine de violer l'unitarité. Prenons un graphe arbitraire contenant L boucles, et incluant n_k vertex d'interaction provenant de \mathcal{L}_k . L'amplitude sera de la forme:

$$\int (d^4l)^L \frac{1}{(l^2)^I} \prod_k (l^k)^{n_k} \quad (3.28)$$

avec I le nombre de lignes internes du graphe. Chaque boucle nécessite une intégration sur un moment, chaque boson sur une ligne interne fournit un propagateur en $1/l^2$, et chaque vertex de \mathcal{L}_k donne lieu, par définition, à une contribution en l^k .

Si nous utilisons une régularisation qui respecte la symétrie chirale, et un schéma de soustraction indépendant de masse (par exemple, la régularisation dimensionnelle et le schéma de soustraction minimale), les moments externes q sont les seuls paramètres dimensionnels du problème. L'amplitude doit donc être de la forme p^D , avec $D = 4L - 2I + \sum_k k n_k$. Les relations usuelles $V - I + L = 1$ et $\sum_k n_k = V$ aboutissent $D = 2 + 2L + \sum_k (k - 2)n_k$. Comme le lagrangien commence avec le terme cinétique, les termes de plus bas ordre sont q^2 , donc $k \geq 2$.

Un graphe contenant N boucles est donc supprimé par un facteur q^{2N} par rapport aux graphes en arbre. Si, par exemple, nous voulons calculer un processus jusqu'à l'ordre q^4 , les graphes en jeu seront

$$L = 0, \quad m_4 = 1, \quad m_{k>4} = 0, \quad L = 1, \quad m_{k>2} = 0, \quad (3.29)$$

soit un graphe en arbre avec un vertex de \mathcal{L}_4 , soit une boucle constituée de vertex de \mathcal{L}_2 . Une telle boucle donnera lieu à des divergences qu'il faut renormaliser. Puisque nous choisissons une régularisation qui préserve la

symétrie chirale, la procédure de renormalisation de cette boucle nécessitera des contre-terms d'ordre q^4 , locaux et respectant les symétries du lagrangien. Or \mathcal{L}_4 fait un inventaire complet de ces termes. On peut donc absorber les divergences engendrées par des boucles à l'aide de contre-terms déjà présents dans le lagrangien.

Plus généralement, si on s'arrête à une puissance donnée q^n des moments, on peut toujours absorber les divergences des boucles contenant des vertex de $\mathcal{L}_{m < n}$ dans des contretermes présents dans \mathcal{L}_n . Notre théorie est donc renormalisable au sens moderne du terme: si on s'arrête à un certain ordre, les divergences sont absorbées par un nombre fini de contretermes qui apparaissent nécessairement dans le lagrangien à cet ordre. La structure des divergences est contrainte par les symétries de la théorie.

Nous allons donc mettre en œuvre un comptage en puissance des moments:

$$U(\theta) \sim 1, \quad (3.30)$$

$$v_\mu, a_\mu, D_\mu U(D_\mu \theta) \sim q, \quad (3.31)$$

et chaque dérivée supplémentaire (covariante pour U , ordinaire pour les sources externes) compte pour une puissance du moment. Dans ce comptage, le lagrangien de Wess-Zumino, qui tient compte des anomalies, commence à l'ordre q^4 .

3.4 Théories de perturbations chirales

Jusqu'ici, nous n'avons pas considéré les masses de quarks. Hors de la limite chirale, le lagrangien effectif est constitué d'une tour infinie d'invariants:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \sum_{k,l} \mathcal{L}_{k,l}, \quad \mathcal{L}_{k,l} \sim q^k m_q^l. \quad (3.32)$$

Il s'agit d'organiser cette double expansion. Les masses de quarks sont liées aux sources scalaire et pseudoscalaire, pour lesquelles rien n'indique à priori le comptage à effectuer. Nous devons comparer m_q et $q \sim M_\pi$. Il s'agit donc de relier les masses des mésons aux masses de quarks. Notre discussion sur les paramètres d'ordre de la symétrie chirale prend alors tout son sens.

3.4.1 $X(N_f) \sim 1$

Si le condensat de quarks est grand, une dépendance linéaire de M_π^2 sur les masses de quark est une bonne approximation au premier ordre:

$$s, p \sim q^2 \quad (3.33)$$

Dans le scénario à 3 phases, N_f est alors loin de $n_{\text{crit}}(N_c)$. Cela donne lieu à une expansion du lagrangien effectif:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_6 + \dots \quad \mathcal{L}_n = \sum_{k+2l=d} \mathcal{L}_{k,l}. \quad (3.34)$$

Ce comptage engendre la Théorie Standard de Perturbations Chirale (S χ PT pour Standard χ PT), proposée par Gasser et Leutwyler [6, 11, 12, 59, 60].

A l'ordre q^2 , on a le lagrangien:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{4} F^2 [\langle D_\mu U^\dagger D^\mu U \rangle + \langle U^\dagger \chi + \chi^\dagger U \rangle], \quad (3.35)$$

avec $\chi = 2B(s + ip)$ et $B = \Sigma/F^2$. L'ordre suivant, $O(q^4)$, est:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & \frac{1}{4} F^2 [L_0 \langle D_\mu U^\dagger D_\nu U D^\mu U^\dagger D^\nu U \rangle \\ & + L_1 \langle D_\mu U^\dagger D^\mu U \rangle^2 + L_2 \langle D_\mu U^\dagger D_\nu U \rangle \langle D^\mu U^\dagger D^\nu U \rangle \\ & + L_3 \langle D_\mu U^\dagger D^\mu U D_\nu U^\dagger D^\nu U \rangle + L_4 \langle D_\mu U^\dagger D^\mu U \rangle \langle \chi^\dagger U + U^\dagger \chi \rangle \\ & + L_5 \langle D_\mu U^\dagger D^\mu U (\chi^\dagger U + U^\dagger \chi) \rangle + L_6 \langle \chi^\dagger U + U^\dagger \chi \rangle^2 \\ & + L_7 \langle \chi^\dagger U - U^\dagger \chi \rangle^2 + L_8 \langle \chi^\dagger U \chi^\dagger U + U^\dagger \chi U^\dagger \chi \rangle \\ & - i L_9 \langle F_{\mu\nu}^R D^\mu U D^\nu U^\dagger + F_{\mu\nu}^L D^\mu U^\dagger D^\nu U \rangle + L_{10} \langle U^\dagger F_{\mu\nu}^R U F^{L;\mu\nu} \rangle \\ & + H_1 \langle F_{\mu\nu}^R F^{R;\mu\nu} + F_{\mu\nu}^L F^{L;\mu\nu} \rangle + H_2 \langle \chi^\dagger \chi \rangle]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Ce lagrangien est valable pour un nombre quelconque de saveurs. Pour $N_f = 3$, le terme L_0 peut être éliminé grâce à des identités de traces [6]. Le cas $N_f = 2$ est esquissé en Sec. A.4. Les L_i sont des constantes de basses énergie, dont les valeurs doivent être obtenues à partir des données expérimentales. Elles sont renormalisées et dépendent de N_f . H_1 et H_2 sont des contretermes de haute énergie, qui n'apparaissent pas dans les processus physiques de basse énergie. Ils correspondent à des divergences présentes dans certaines fonctions de Green (la structure de ces divergences est en effet contrainte par la symétrie chirale).

3.4.2 $X(N_f) = 0$

Supposons que le condensat de quarks est nul. Dans le scénario à 3 phases, cela correspondrait à la phase intermédiaire, au-dessus de $n_{\text{crit}}(N_c)$. Quand on fait l'expansion de M_π^2 en puissance des masses de quarks, c'est le terme quadratique qui contribue en premier. Le lagrangien à l'ordre le plus bas sera donc de la forme:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} F^2 [\langle D_\mu U^\dagger D^\mu U \rangle + A \langle (U^\dagger M)^2 + (M^\dagger U)^2 \rangle + Z^S \langle U^\dagger M + M^\dagger U \rangle^2 \\ & + Z^P \langle U^\dagger M - M^\dagger U \rangle^2 + H \langle M^\dagger M \rangle], \end{aligned} \quad (3.37)$$

avec $M = s + ip$. A est lié au comportement à basse énergie du corrélateur $\langle S_a S_b - P_a P_b \rangle$, Z_S à $\langle S_0 S_0 \delta_{ab} - S_a S_b \rangle$ et Z_P à $\langle P_0 P_0 \delta_{ab} - P_a P_b \rangle$. Z_S et Z_P violent la règle de Zweig respectivement dans les secteurs scalaire et pseudoscalaire. Ces trois constantes de basse énergie sont des paramètres d'ordre dans le cas générique $N_f \geq 3$. H est un contreterme de haute énergie.

3.4.3 Cas intermédiaire

On veut tenir compte de l'éventualité d'un condensat de quarks faible. Dans le scénario à 3 phases, cela voudrait dire que l'on approche le point critique $n_{\text{crit}}(N_c)$. On met inclure à l'ordre le plus bas les termes linéaire et quadratique en masse de quarks:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_2 = & \frac{1}{4} F^2 [\langle D_\mu U^\dagger D^\mu U \rangle + 2B \langle U^\dagger M + M^\dagger U \rangle \\ & + A \langle (U^\dagger M)^2 + (M^\dagger U)^2 \rangle + Z^S \langle U^\dagger M + M^\dagger U \rangle^2 \\ & + Z^P \langle U^\dagger M - M^\dagger U \rangle^2 + H \langle M^\dagger M \rangle] . \end{aligned} \quad (3.38)$$

Cela peut s'interpréter comme le premier ordre d'une expansion suivant le comptage:

$$s, p \sim q, \quad B \sim q, \quad (3.39)$$

ce qui donne lieu à l'expansion du lagrangien effectif:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \tilde{\mathcal{L}}_2 + \tilde{\mathcal{L}}_3 + \tilde{\mathcal{L}}_4 + \tilde{\mathcal{L}}_5 + \dots \quad \tilde{\mathcal{L}}_n = \sum_{k+l+n=d} B_0^n \mathcal{L}_{k,l}. \quad (3.40)$$

On obtient ainsi la Théorie Généralisée de Perturbations Chirale (G χ PT pour Generalized χ PT), proposée par Fuchs, Knecht, Moussalam, Saizdjan et Stern [7, 9, 13, 14, 61, 62].

La contribution d'ordre suivant est $O(q^3)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_3 = & \frac{1}{4} F^2 [\xi \langle D_\mu U^\dagger D^\mu U (M^\dagger U + U^\dagger M) \rangle \\ & + \tilde{\xi} \langle D_\mu U^\dagger D^\mu U \rangle \langle M^\dagger U + U^\dagger M \rangle + \rho_1 \langle (M^\dagger U)^3 + (U^\dagger M)^3 \rangle \\ & + \rho_2 \langle (M^\dagger U + U^\dagger M) M^\dagger M \rangle + \rho_3 \langle M^\dagger U - U^\dagger M \rangle \langle (M^\dagger U)^2 - (U^\dagger M)^2 \rangle \\ & + \rho_4 \langle M^\dagger U + U^\dagger M \rangle \langle (M^\dagger U)^2 + (U^\dagger M)^2 \rangle + \rho_5 \langle M^\dagger M \rangle \langle M^\dagger U + U^\dagger M \rangle \\ & + \rho_6 \langle M^\dagger U - U^\dagger M \rangle^2 \langle M^\dagger U + U^\dagger M \rangle + \rho_7 \langle M^\dagger U + U^\dagger M \rangle^3] \end{aligned} \quad (3.41)$$

Rappelons que les constantes de basse énergie dépendent de N_f . Nous pouvons remarquer que:

- c'est le même lagrangien effectif dont on fait l'expansion selon deux méthodes différentes. Si l'on considérait la série complète des \mathcal{L}_n et celle des $\tilde{\mathcal{L}}_n$, on obtiendrait le même lagrangien,

- $\tilde{\mathcal{L}}_n$ inclut \mathcal{L}_n , et lui adjoint des termes qui le comptage standard jugerait d'ordre plus élevées,
- le comptage généralisé est également valable pour de grandes valeurs du condensat de quarks. Les constantes supplémentaires présentes dans $\tilde{\mathcal{L}}_n$ auront alors un faible impact sur les résultats numériques. Ces derniers seront similaires à ceux obtenus dans le cadre standard,
- le comptage généralisé permet également de traiter le cas $\Sigma = 0$, ce qui est impossible dans l'approche standard.
- les constantes $L_{6,7,8}$ correspondent à Z_S , Z_P et A , tandis que $L_{4,5}$ correspondent à $\tilde{\xi}$ et ξ . Toutefois, les constantes standard L_i sont définies avec $\chi = B(s + ip)$. Pour relier ces constantes au comportement à basse énergie de fonctions de Green de QCD, il faut diviser ces fonctions de Green par des puissances de B . Dans la limite du condensat de quark nul, $L_{i=4,5,6,7,8}$ seront donc par définition divergentes. Un tel problème n'affecte pas A , Z_S , Z_P , ξ et $\tilde{\xi}$.

3.5 Expansion en masses de quarks

La théorie de perturbations chirale nous permet d'écrire le développement en masse de quarks d'une observable telle que $F_P^2 M_P^2$, avec la structure:

$$F_P^2 M_P^2 = m_q \Sigma_P + m_q^2 [a_P + b_P \log(M_P)] + F_P^2 \delta_P \quad (3.42)$$

où m_q désigne formellement les masses des quarks u , d ou s , et $F_P^2 \delta_P$ rassemble les ordres supérieurs $O(m_q^3)$ (commençant par les termes NNLO *next-to-next-to-leading-order*). Les coefficients Σ_P , a_P , b_P sont des combinaisons de constantes de basse énergie. Les termes logarithmiques chiraux $\log(M_P)$ proviennent des boucles de mésons. Le coefficient associé à chaque puissance de m_q est indépendant de l'échelle de renormalisation de la théorie effective ($F_P^2 M_P^2$ et m_q sont indépendants de cette échelle).

Remarquons que l'approche généralisée ne remet pas en cause la convergence *globale* des expansions en masses de quarks, qui est justifiée par une estimation dimensionnelle naïve. Les constantes de basse énergie qui interviennent dans ces expansions peuvent être mis en relation avec des fonctions de Green à n points de courants axiaux et vectoriels et de densités scalaires et pseudoscalaires. L'estimation dimensionnelle naïve de ces constantes consiste à saturer ces fonctions de Green par un échange de résonances massives, de

masse d'ordre Λ_{QCD} . Pour les coefficients d'ordre m_q^n on aboutit ainsi à l'estimation $\sim 1/\Lambda_{\text{QCD}}^n$. L'expansion en masses de quarks se comporterait donc comme une série en puissances de $m_q/\Lambda_{\text{QCD}} \ll 1$, à priori convergente.

Toutefois, cette estimation naïve ne peut s'appliquer au terme linéaire Σ_P , qui fait intervenir le condensat de quarks (pas d'état physique coloré permettant la saturation). Et la convergence globale de la série n'implique pas nécessairement une domination du terme linéaire en masse de quarks (le condensat) sur le terme quadratique.

Nous allons donc partir des expansions de $F_P^2 M_P^2$ et F_P^2 en puissances de masses de quarks. Nous supposons que les restes NNLO (par exemple δ_P/M_P^2) sont petits, i.e. que la convergence globale est bonne. En revanche, nous ne ferons pas d'hypothèse sur la taille respective des deux premiers termes [$m_q \Sigma_P$ comparé à $m_q^2(a_P + b_P \log M_P)$]. Ainsi, nos connaissances sur les constantes de désintégration et les masses des mésons pseudoscalaires vont nous permettre de contraindre les constantes de basse énergie apparaissant aux premiers ordres de ces expansions [22, 23].

3.6 Masses des mésons pseudoscalaires et Σ

3.6.1 Rôle de L_6

Commençons par étudier les masses des pseudoscalaires M_π , M_K , M_η , en partant des formules de masses à l'ordre $O(p^4)$ standard, Eqs. (10.7) dans Ref. [6] et en les réécrivant comme:

$$F_\pi^2 M_\pi^2 = 2m\Sigma(3) + 2m(m_s + 2m)Z^S + 4m^2 A + 4m^2 B_0^2 L + F_\pi^2 \delta_\pi \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} F_K^2 M_K^2 &= (m_s + m)\Sigma(3) + (m_s + m)(m_s + 2m)Z^S \\ &\quad + (m_s + m)^2 A + m(m_s + m)B_0^2 L + F_K^2 \delta_K. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Z^S et A sont des constantes indépendantes d'échelle qui contiennent les constantes de basse énergie $L_6(\mu)$ et $L_8(\mu)$,

$$Z^S = 32B_0^2 \left[L_6(\mu) - \frac{1}{512\pi^2} \left(\log \frac{M_K^2}{\mu^2} + \frac{2}{9} \log \frac{M_\eta^2}{\mu^2} \right) \right], \quad (3.45)$$

$$A = 16B_0^2 \left[L_8(\mu) - \frac{1}{512\pi^2} \left(\log \frac{M_K^2}{\mu^2} + \frac{2}{3} \log \frac{M_\eta^2}{\mu^2} \right) \right], \quad (3.46)$$

avec $B_0 = \Sigma(3)/F_0^2$ et $F_0 \equiv F(3)$. Les logarithmes chiraux $O(p^4)$ restants sont contenus dans L :

$$L = \frac{1}{32\pi^2} \left[3 \log \frac{M_K^2}{M_\pi^2} + \log \frac{M_\eta^2}{M_K^2} \right] = 25.3 \cdot 10^{-3}. \quad (3.47)$$

Il existe une équation similaire pour $F_\eta^2 M_\eta^2$:

$$\begin{aligned} F_\eta^2 M_\eta^2 = & \frac{2}{3}(2m_s + m)\Sigma + \frac{2}{3}(2m_s + m)(m_s + 2m)Z^S \\ & + \frac{4}{3}(2m_s^2 + m^2)A + \frac{8}{3}(m_s - m)^2 Z^P \\ & + \frac{1}{3} \frac{F_\pi^4 M_\pi^4}{F_0^4} [X(3)]^2 L + F_\eta^2 \delta_\eta, \end{aligned} \quad (3.48)$$

avec la constante indépendante d'échelle $Z^P = 16B_0^2 L_7$. Remarquons que l'expression des constantes A , Z_S et Z_P en termes de $L_{i=6,7,8}$ inclut un facteur B_0 , de sorte que A , Z_S et Z_P ne divergent pas dans la limite $\Sigma(3) \rightarrow 0$. Il y a aussi 3 équations pour F_P^2 ($P=\pi, K, \eta$), qui seront traitées dans la Section 3.7.1. Remarquons qu'il est intéressant de considérer $F_P^2 M_P^2$ et F_P^2 comme des observables indépendantes, car on peut d'emblée séparer les constantes "de masse" L_6, L_7, L_8 des constantes L_4, L_5 qui apparaissent seulement dans les constantes de désintégration F_P^2 .

Dans (3.43), (3.44) et (3.48), tous les termes linéaires et quadratiques en masses de quarks sont visibles. Toutes les contributions restantes, d'ordre $O(m_{\text{quark}}^3)$ ou plus, sont rassemblées dans les restes δ_P . Nous pouvons imaginer que ces derniers nous sont donnés, ce qui permet de considérer (3.43), (3.44) et (3.48) comme des identités algébriques, reliant le condensat de quarks à 3 saveurs $\Sigma(3)$ [exprimé en unités physiques: $X(3) = 2m\Sigma(3)/(F_\pi M_\pi)^2$], le rapport de masses de quarks $r = m_s/m$, et les constantes de basse énergie $F_0, L_6(\mu), L_7$ et $L_8(\mu)$.

Nous n'allons pas effectuer d'expansion supplémentaire, mais nous allons étudier les conséquences de l'hypothèse $\delta_P \ll M_P^2$ sur les constantes de basse énergie. Remarquons que, même en imposant $\delta_P = 0$, nous ne sommes pas dans le cadre de χ PT standard à une boucle [6]: nous ne supposons pas que le condensat $\Sigma(3)$ domine dans (3.43), (3.44) et (3.48), nous ne traitons donc pas $1 - X(3)$ comme un petit paramètre d'expansion, et nous ne remplaçons pas $2mB_0$ par M_π^2 au sein des termes d'ordre supérieur. Nous ne suivons pas non plus χ PT généralisée [7], puisque nous ne traitons pas B_0 comme un paramètre d'expansion: même avec $\delta_P = 0$, (3.43), (3.44) et (3.48) dépassent l'ordre en arbre de $G\chi$ PT, puisque ces équations incluent des logarithmes chiraux.

Il est intéressant de réexprimer (3.43) et (3.44) sous la forme:

$$\frac{2m}{F_\pi^2 M_\pi^2} [\Sigma(3) + (2m + m_s)Z^S] = 1 - \tilde{\epsilon}(r) - \frac{4m^2 B_0^2}{F_\pi^2 M_\pi^2} \frac{rL}{r-1} - \delta, \quad (3.49)$$

$$\frac{4m^2 A}{F_\pi^2 M_\pi^2} = \tilde{\epsilon}(r) + \frac{4m^2 B_0^2}{F_\pi^2 M_\pi^2} \frac{L}{r-1} + \delta', \quad (3.50)$$

où

$$\tilde{\epsilon}(r) = 2 \frac{\tilde{r}_2 - r}{r^2 - 1}, \quad \tilde{r}_2 = 2 \left(\frac{F_K M_K}{F_\pi M_\pi} \right)^2 - 1 \sim 39. \quad (3.51)$$

δ et δ' sont des combinaisons linéaires des restes δ_π et δ_K :

$$\delta = \frac{r+1}{r-1} \frac{\delta_\pi}{M_\pi^2} - \left(\tilde{\epsilon} + \frac{2}{r-1} \right) \frac{\delta_K}{M_K^2}, \quad (3.52)$$

$$\delta' = \frac{2}{r-1} \frac{\delta_\pi}{M_\pi^2} - \left(\tilde{\epsilon} + \frac{2}{r-1} \right) \frac{\delta_K}{M_K^2}. \quad (3.53)$$

Pour r grand, on s'attend à $\delta' \ll \delta \sim \delta_\pi/M_\pi^2$. Comme dans Ref. [60], nous prenons comme paramètres initiaux $F_0 = \lim_{m, m_s \rightarrow 0} F_\pi$ [i.e. $L_4(\mu)$], la constante $L_6(\mu)$ qui viole la règle de Zweig et le rapport de masses de quarks $r = m_s/m$. (3.49) aboutit donc à une formule non-perturbative (pas d'expansion) pour $X(3)$:

$$X(3) = \frac{2}{1 + [1 + \kappa(1 - \tilde{\epsilon} - \delta)]^{1/2}} (1 - \tilde{\epsilon} - \delta), \quad (3.54)$$

où κ contient la constante $L_6(\mu)$:

$$\begin{aligned} \kappa = & 64(r+2) \left(\frac{F_\pi M_\pi}{F_0^2} \right)^2 \left\{ L_6(\mu) \right. \\ & \left. - \frac{1}{256\pi^2} \left(\log \frac{M_K}{\mu} + \frac{2}{9} \log \frac{M_\eta}{\mu} \right) + \frac{rL}{16(r-1)(r+2)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

(3.54) est une identité exacte, et intéressante si le reste δ dans (3.52) est petit, i.e. si l'expansion des correlateurs de QCD en puissances de masses de quarks m_u, m_d, m_s converge globalement. Cela signifie que $\delta_P \ll M_P^2$ dans (3.43) et (3.44), mais pas nécessairement que le terme linéaire (lié au condensat) domine.

κ décrit les fluctuations quantiques du condensat, et justement $\kappa = O(1/N_c)$. D'un autre côté, pour que κ soit petit, il faut bien choisir $L_6(\mu)$: $\kappa = 0$ for $10^3 \cdot L_6 = -0.26$ à l'échelle $\mu = M_\rho$, ce qui est proche de la valeur habituellement avancée dans les analyses de χ PT standard [8]. Dans ce cas, (3.54) prédit $X(3)$ proche de 1, sauf si le rapport de masses de quarks r décroît nettement de sorte que $\tilde{\epsilon} \rightarrow 1$. Cet effet est bien connu en $G\chi$ PT [7]: la valeur minimale de r (correspondant à $\tilde{\epsilon} = 1$ et $X(3) = 0$) est $\tilde{r}_1 = 2(F_K M_K)/(F_\pi M_\pi) - 1 \sim 8$. Remarquons que pour ces très petites valeurs de r , la combinaison des restes d'ordre supérieur δ n'est certainement plus une quantité négligeable dans (3.54).

Mais les fluctuations quantiques peuvent altérer cette image: le nombre qui précède les accolades dans (3.55) est très grand (~ 5340 pour $r = 26$ et

$F_0 = 85$ MeV). Dès lors, même une petite valeur positive de $L_6(M_\rho)$ peut mener à une forte suppression de $X(3)$, indépendamment de la valeur de $r = m_s/m$. Cet effet est représenté sur les Figs. 3.1 et 3.2, où $X(3)$ est tracé en fonction de $L_6(M_\rho)$ pour $r = 20$, $r = 25$, $r = 30$ et $F_0 = 85, 80, 75$ et 70 MeV. La décroissance de $X(3)$ est même légèrement plus marquée quand on diminue F_0 .

Une fois $X(3)$ connu, on peut utiliser (3.50) pour calculer $L_8(\mu)$:

$$L_8(\mu) = \frac{L}{16(r-1)} + \frac{F_0^4}{F_\pi^2 M_\pi^2} \frac{\tilde{\epsilon} + \delta'}{16[X(3)]^2} \quad (3.56)$$

$$+ \frac{1}{512\pi^2} \left\{ \log \frac{M_K^2}{\mu^2} + \frac{2}{3} \log \frac{M_\eta^2}{\mu^2} \right\}. \quad (3.57)$$

Cette constante ne dépend de L_6 qu'à travers $X(3)$. On remarque que cette dépendance est plus faible quand F_0 diminue (en fait, L_8 dépend de L_6 à travers B_0).

L_7 s'obtient à l'aide de $F_\eta^2 M_\eta^2$ (3.48):

$$\begin{aligned} L_7 = & \frac{1}{32[X(3)]^2} \frac{F_0^4}{F_\pi^2 M_\pi^2} \\ & \times \left\{ \frac{1}{(r-1)^2} [3F_\eta^2 M_\eta^2 + F_\pi^2 M_\pi^2 - 4F_K^2 M_K^2] - F_\pi^2 M_\pi^2 \tilde{\epsilon}(r) \right\} \\ & - \frac{r^2}{32(r-1)^2 [X(3)]^2} \frac{F_0^4}{F_\pi^2 M_\pi^2} \left[3F_\eta^2 \delta_\eta + \frac{8r}{r+1} F_K^2 \delta_K + (2r-1) F_\pi^2 \delta_\pi \right] \end{aligned} \quad (3.58)$$

où F_η sera discutée dans la Sec. 3.7.1. On remarque que la formule de Gell-Mann–Okubo [64] corrèle très fortement L_7 et L_8 , i.e. A et Z_P :

$$\begin{aligned} 3F_\eta^2 M_\eta^2 - 4F_K^2 M_K^2 + F_\pi^2 M_\pi^2 &= 4(m_s - m)^2 [A + 2Z_P] \\ &- \frac{1}{32\pi^2} \frac{F_\pi^4 M_\pi^4}{F_0^2} (r-1) [X(3)]^2 \left[3 \log \frac{M_K^2}{M_\pi^2} + \log \frac{M_\eta^2}{M_K^2} \right] \\ &+ 3F_\eta^2 \delta_\eta^2 - 4F_K^2 \delta_K^2 + F_\pi^2 \delta_\pi^2. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Expérimentalement, cette relation entre les masses et les constantes de désintégration est bien satisfaite. Cela implique une corrélation entre A et Z_P telle que $A + 2Z_P$ est petit².

2. Dans le cadre standard, le membre de droite de (3.60) est d'ordre $O(p^4)$, et donc "naturellement" de petit taille, bien que la relation de Gell-Mann–Okubo fournisse là encore une contrainte sur L_7 et L_8 . Remarquons toutefois que cette constatation ne suffit pas à privilégier le cadre standard: la petitesse de $A + 2Z_P$ pourrait être fortuite, ou liée à un phénomène sans rapport avec la taille du condensat de quarks à 3 saveurs.

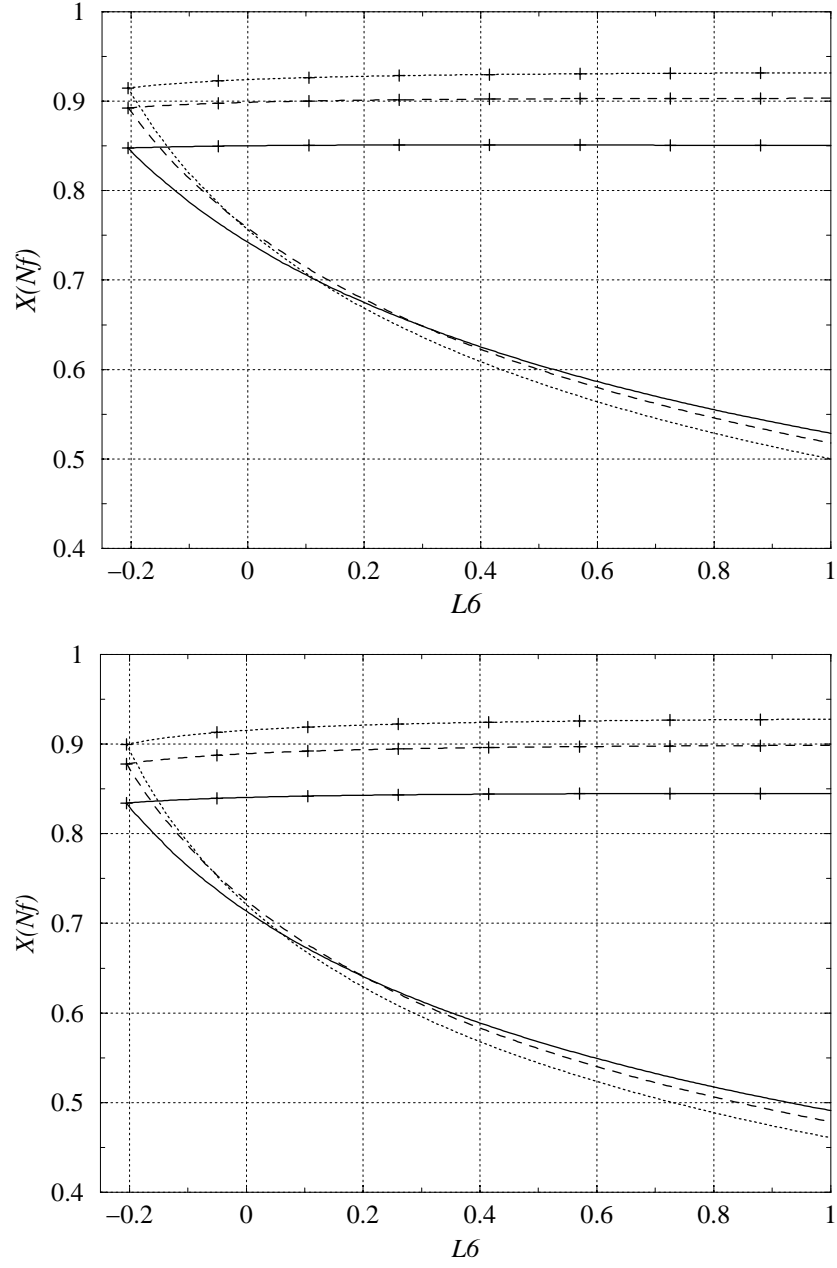


FIG. 3.1 – $X(2)$ (lignes munies des croix) et $X(3)$ (lignes sans symbole) en fonction de $L_6(M_\rho) \cdot 10^3$ et $r = m_s/m$ (traits pleins: $r = 20$, tirets: $r = 25$, pointillés: $r = 30$) pour $F_0 = 85$ MeV (haut) et 80 MeV (bas).

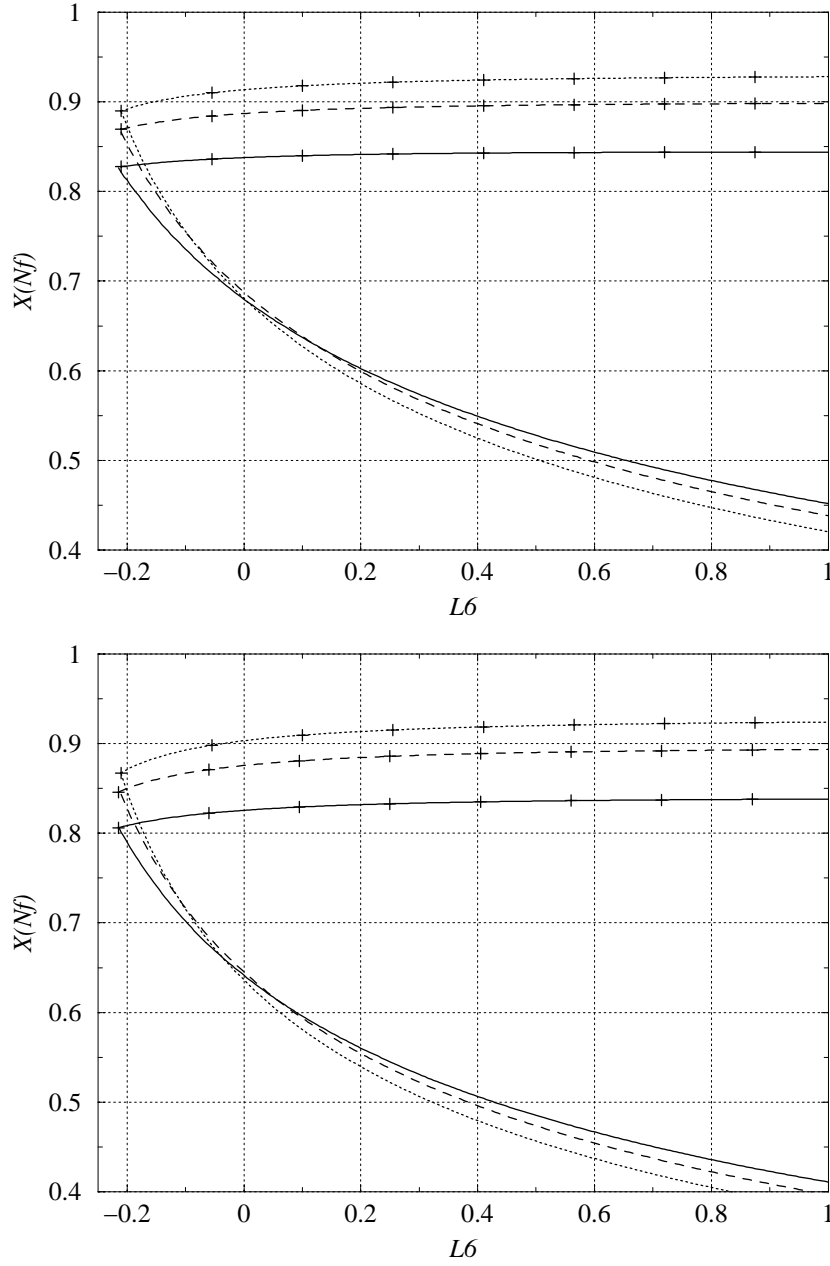


FIG. 3.2 – $X(2)$ (lignes munies des croix) et $X(3)$ (lignes sans symbole) en fonction de $L_6(M_\rho) \cdot 10^3$ et $r = m_s/m$ (traits pleins: $r = 20$, tirets: $r = 25$, pointillés: $r = 30$) pour $F_0 = 75$ MeV (haut) et 70 MeV (bas).

3.6.2 Inégalité paramagnétique pour Σ

Nous avons vu dans la Section 2.5 que les fluctuations de $\bar{q}q$ entraînaient une augmentation du condensat à deux saveurs $\Sigma(2) = -\lim_{m \rightarrow 0} \langle \bar{u}u \rangle|_{m_s \text{ fixe}}$ par rapport à $\Sigma(3)$, de sorte que $X(2) > X(3)$. Le condensat de quarks à deux saveurs peut être obtenu en considérant la limite:

$$\Sigma(2) = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{(F_\pi M_\pi)^2}{2m} = \Sigma(3) + m_s Z^S|_{m=0} + \delta_2, \quad (3.61)$$

en gardant m_s fixé. Nous avons $\delta_2 = \lim_{m \rightarrow 0} F_\pi^2 \delta_\pi / (2m)$ et $Z^S|_{m=0} = Z^S + B_0^2 \Delta Z^S$, avec:

$$\Delta Z^S = \frac{1}{16\pi^2} \left[\log \frac{M_K^2}{\bar{M}_K^2} + \frac{2}{9} \cdot \log \frac{M_\eta^2}{\bar{M}_\eta^2} \right], \quad (3.62)$$

et $\bar{M}_P^2 = \lim_{m \rightarrow 0} M_P^2$. L'effet de ΔZ^S est très faible³. Il faut comparer ΔZ^S aux termes logarithmiques contenus dans Z^S (3.45), considérés à une échelle typique $\mu \sim M_\rho$. ΔZ^S vaut à peine 10% de ce terme logarithmique.

Après avoir éliminé Z^S de (3.49) et (3.61), on obtient le rapport de Gell-Mann–Oakes–Renner à deux saveurs $X(2) = 2m\Sigma(2)/(F_\pi M_\pi)^2$:

$$\begin{aligned} X(2) = & [1 - \tilde{\epsilon}] \frac{r}{r+2} + \frac{2}{r+2} X(3) \\ & - \frac{(F_\pi M_\pi)^2}{2F_0^4} X(3)^2 \left[\frac{2r^2}{(r-1)(r+2)} L - r \Delta Z^S \right] + \delta_X, \end{aligned} \quad (3.63)$$

avec:

$$\delta_X = \delta_2 - \frac{r}{r+2} \delta \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} = & \frac{1}{F_\pi^2 M_\pi^2} \left[m \lim_{m \rightarrow 0} \frac{F_\pi^2 \delta_\pi}{m} - \frac{r(r+1)}{(r+2)(r-1)} F_\pi^2 \delta_\pi \right] \\ & + \frac{r}{r+1} \left(\tilde{\epsilon} + \frac{2}{r-1} \right) \frac{\delta_K}{M_K^2}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Dans l'expression de δ_X , les restes δ_P/M_P^2 sont supprimés par m/m_s : cette suppression est évidente pour δ_K [$\tilde{\epsilon} = O(1/r)$], tandis que l'opérateur appliqué sur δ_π supprime les composantes $O(mm_s^2)$. Pour $r > 20$ on s'attend donc à $|\delta_X| \sim |\delta'|$. La dépendance de $X(2)$ sur L_6 est entièrement cachée dans $X(3)$. Elle est donc marginale, comme le confirment les Figs. 3.1 et 3.2, où $X(2)$ est tracé avec $X(3)$ pour $r = 20, 25, 30$.

3. Son évaluation suit l'analyse exposée en Sec. B.3.

L'inégalité paramagnétique $X(2) > X(3)$ fixe la valeur maximale que peut atteindre $X(3) = X(3)|_{\max}$. Si on considère (3.61) en négligeant $\delta\Sigma(2)$, on voit que ceci correspond à la borne sur L_6 :

$$L_6(\mu) > \frac{1}{512\pi^2} \left(\log \frac{\bar{M}_K^2}{\mu^2} + \frac{2}{9} \log \frac{\bar{M}_\eta^2}{\mu^2} \right). \quad (3.66)$$

Fig. 3.1 montre clairement la borne inférieure correspondante: $L_6(M_\rho) > -0.21 \cdot 10^{-3}$.

$X(2)$ est en revanche fortement corrélé à r , en particulier pour les petites valeurs de r . (3.63) nous indique que $X(2) \sim [1 - \tilde{\epsilon}] \cdot r/(r + 2)$, à de petites corrections liées à $X(3)$. Si nous négligeons ΔZ^S , $X(2)$ est une fonction quadratique de $X(3)$. On peut alors étudier les variations de $X(2)$ quand $X(3)$ varie de 0 à $X(3)|_{\max}$. Les Figs. 3.1 et 3.2 confirment que $X(2)$ n'est pas une fonction monotone de $X(3)$: elle est d'abord croissante, puis décroissante. Cette décroissance provient du terme négatif quadratique en $X(3)$ dans (3.63), dont l'influence devient sensible quand $X(3)$ est grand. Cette décroissance est plus accentuée quand F_0 diminue car le facteur qui multiplie $[X(3)]^2$ dans (3.63) augmente alors.

$X(2)$ n'atteint donc pas son maximum pour la borne paramagnétique $X(2) = X(3)|_{\max}$, tandis que son minimum correspond à la plus petite des deux valeurs atteintes en $X(3) = 0$ et $X(3) = X(3)|_{\max}$ ⁴. On se représenter intuitivement l'évolution de ce minimum lorsque r varie. Pour grand r , le terme linéaire en $X(3)$ dans (3.63) est négligeable: le minimum de $X(2)$ est alors en $X(3) = X(3)|_{\max}$. Pour petit r , $X(2)$ et $X(3)$ se rapprochent de 0, et le terme quadratique en $X(3)$ devrait être négligeable par rapport au terme linéaire. Le minimum de $X(2)$ se trouve alors en $X(3) = 0$. Ceci est confirmé par l'analyse numérique précise de (3.63) incluant ΔZ^S . On a représenté sur la Fig. 3.3 les intervalles de variation de $X(2)$ pour différentes valeurs de F_0 . La courbe correspondant au minimum de $X(2)$ présente une dérivée discontinue lorsque le minimum de $X(2)$ ne correspond plus à $X(3) = 0$, mais à $X(3)|_{\max}$. On voit que $X(2)$ est fortement corrélé à r , bien qu'une valeur élevée de $X(2) \sim 0.9$ puisse être associée à un large intervalle pour r .

4. Ceci corrige l'affirmation de Ref. [21], selon laquelle les valeurs minimales et maximales de $X(2)$ étaient obtenues respectivement pour $X(3) = 0$ et $X(3) = X(3)|_{\max}$.

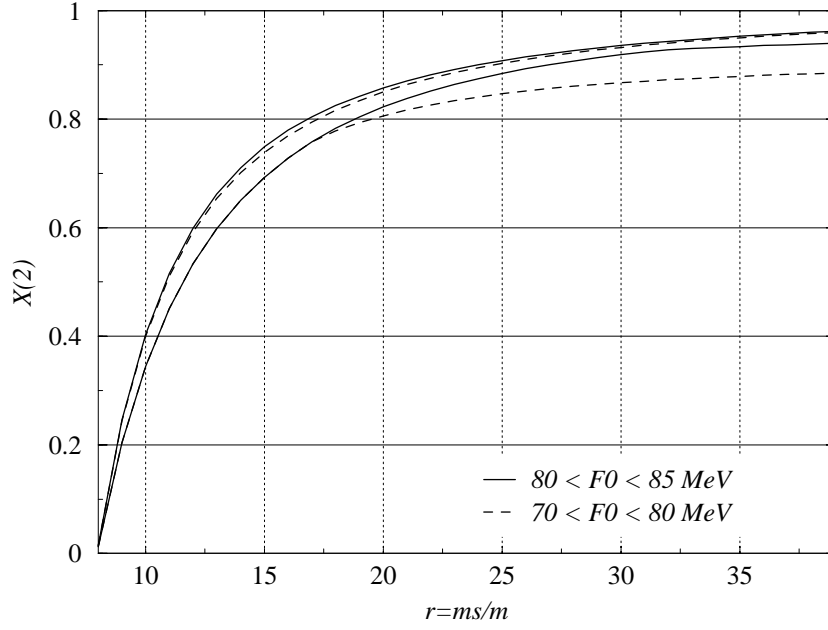


FIG. 3.3 – Intervalle de variation de $X(2)$ en fonction de r pour différentes valeurs de F_0

3.7 Constantes de désintégrations et F^2

3.7.1 Rôle de L_4

Il est possible d'effectuer le même travail pour les constantes de désintégration:

$$F_\pi^2 = F_0^2 + 2m\xi + 2(2m + m_s)\tilde{\xi} + \frac{1}{16\pi^2} \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{F_0^2} X(3) \left[2 \log \frac{M_K^2}{M_\pi^2} + \log \frac{M_\eta^2}{M_K^2} \right] + \varepsilon_\pi, \quad (3.67)$$

$$F_K^2 = F_0^2 + (m + m_s)\xi + 2(2m + m_s)\tilde{\xi} + \frac{1}{2} \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{F_0^2} X(3) L + \varepsilon_K, \quad (3.68)$$

avec les constantes indépendantes d'échelle reliées à L_4 et L_5 :

$$\xi = 8B_0 \left[L_5(\mu) - \frac{1}{256\pi^2} \left(\log \frac{M_K^2}{\mu^2} + 2 \log \frac{M_\eta^2}{\mu^2} \right) \right], \quad (3.69)$$

$$\tilde{\xi} = 8B_0 \left[L_4(\mu) - \frac{1}{256\pi^2} \log \frac{M_K^2}{\mu^2} \right], \quad (3.70)$$

(3.67) et (3.68) contiennent tous les termes constants ou linéaires en masse de quarks dans l'expansion de F_π^2 et F_K^2 , tandis que ε_P désignent des restes d'ordre $O(m_{\text{quark}}^2)$. Il existe également une formule pour F_η , que l'on peut réécrire de manière analogue à la formule de Gell-Mann–Okubo:

$$\begin{aligned} F_\eta^2 = & \frac{4}{3}F_K^2 - \frac{1}{3}F_\pi^2 + \frac{1}{24\pi^2} \frac{M_\pi^2 F_\pi^2}{F_0^2} r X(3) \log \frac{M_\eta^2}{M_K^2} \\ & + \frac{1}{48\pi^2} \frac{M_\pi^2 F_\pi^2}{F_0^2} X(3) \left(\log \frac{M_\eta^2}{M_K^2} - \log \frac{M_K^2}{M_\pi^2} \right) \\ & + \varepsilon_\eta - \frac{4}{3}\varepsilon_K + \frac{1}{3}\varepsilon_\pi. \end{aligned} \quad (3.71)$$

On peut réexprimer (3.67) et (3.68) sous la forme:

$$\begin{aligned} \frac{2m\xi}{F_\pi^2} = & \tilde{\eta}(r) + \frac{1}{32\pi^2} \frac{F_\pi^2}{F_0^2} \frac{M_\pi^2}{F_\pi^2} \frac{X(3)}{r-1} \left[5 \log \frac{M_K^2}{M_\pi^2} + 3 \log \frac{M_\eta^2}{M_K^2} \right] \\ & + \frac{2}{r-1} \left[\frac{\varepsilon_\pi}{F_\pi^2} - \frac{\varepsilon_K}{F_\pi^2} \right], \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \frac{2m\tilde{\xi}}{F_\pi^2} = & \frac{1}{r+2} \left\{ 1 - \tilde{\eta}(r) - \frac{F_0^2}{F_\pi^2} \right. \\ & - \frac{1}{32\pi^2} \frac{F_\pi^2}{F_0^2} \frac{M_\pi^2}{F_\pi^2} X(3) \left[\frac{4r+1}{r-1} \log \frac{M_K^2}{M_\pi^2} + \frac{2r+1}{r-1} \log \frac{M_\eta^2}{M_K^2} \right] \Big\} \\ & + \frac{1}{r+2} \left[\frac{2}{r-1} \frac{\varepsilon_K}{F_\pi^2} - \frac{r+1}{r-1} \frac{\varepsilon_\pi}{F_\pi^2} \right], \end{aligned} \quad (3.73)$$

avec:

$$\tilde{\eta}(r) = \frac{2}{r-1} \left(\frac{F_K^2}{F_\pi^2} - 1 \right) \sim \frac{0.977}{r-1}. \quad (3.74)$$

On voit que ξ (i.e. L_5) est essentiellement donné par $X(3)$ et r , tandis que $\tilde{\xi}$ (i.e. L_4) dépend crucialement de la différence entre $F(3)$ et F_π . Ainsi, on peut extraire de (3.73) une équation quadratique pour $[F(3)/F_\pi]^2$ où intervient L_4 :

$$\frac{F(3)^4}{F_\pi^4} - (1 - \tilde{\eta} - \varepsilon) \frac{F(3)^2}{F_\pi^2} + \iota X(3) = 0, \quad (3.75)$$

avec:

$$\begin{aligned} \iota = & 8(r+2) \frac{M_\pi^2}{F_\pi^2} \left\{ L_4(\mu) - \frac{1}{256\pi^2} \log \frac{M_K^2}{\mu^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{256\pi^2} \frac{1}{(r+2)(r-1)} \left[(4r+1) \log \frac{M_K^2}{M_\pi^2} + (2r+1) \log \frac{M_\eta^2}{M_K^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\varepsilon = \frac{r+1}{r-1} \frac{\varepsilon_\pi}{F_\pi^2} - \left(\tilde{\eta} + \frac{2}{r-1} \right) \frac{\varepsilon_K}{F_K^2}. \quad (3.77)$$

$[F(N_f)/F_\pi]^2$	$F(N_f)$ (MeV)	$[F(N_f)/F_\pi]^2$	$F(N_f)$ (MeV)
0.95	90.1	0.7	77.3
0.9	87.6	0.6	71.6
0.8	82.6	0.5	65.3

TAB. 3.1 – Correspondance entre $[F(N_f)/F_\pi]^2$ et $F(N_f)$.

(3.75) a pour solution:

$$\frac{F(3)^2}{F_\pi^2} = \frac{1 - \tilde{\eta} - \varepsilon + \sqrt{(1 - \tilde{\eta} - \varepsilon)^2 - 4\iota X(3)}}{2}. \quad (3.78)$$

Remarquons que cette formule est l'analogie de (3.54), qui reliait $X(3)$ à $L_6(\mu)$ via le paramètre κ . Pour $r = 25$, le facteur précédant les accolades dans la définition de ι est de l'ordre de $460 \cdot X(3)$, et ι s'annule pour $L_4(M_\rho) = -0.51 \cdot 10^{-3}$.

On peut tracer de la même manière que précédemment les variations de $F(3)$ avec $L_4(M_\rho)$ pour différentes valeurs de r et de $X(3)$ (voir Figs. 3.4 et 3.5). On constate que l'intervalle dans lequel L_4 peut varier s'élargit quand $X(3)$ diminue. Cet élargissement est lié à la définition même de L_4 , qui décrit le comportement à basse énergie d'une fonction de corrélation de QCD, divisée par $B_0 = \Sigma(3)/F(3)^2$.

(3.75) ne peut avoir de solution que si $\iota X(3) \leq (1 - \tilde{\eta} - \varepsilon)^2/4$. (3.75) donne alors l'encadrement de $F(3)$:

$$\frac{1 - \tilde{\eta} - \varepsilon}{2} \leq \frac{F(3)^2}{F_\pi^2} \leq 1 - \tilde{\eta} - \varepsilon. \quad (3.79)$$

3.7.2 Inégalité paramagnétique pour F^2

On obtient $F(2)$ en prenant la limite:

$$F^2(2) = \lim_{m \rightarrow 0} F_\pi^2 = F(3)^2 + 2m_s \tilde{\xi}|_{m=0} + \varepsilon_2, \quad (3.80)$$

en gardant m_s fixé. Nous avons $\varepsilon_2 = \lim_{m \rightarrow 0} \varepsilon_\pi$ et $\tilde{\xi}|_{m=0} = \tilde{\xi} + B_0 \Delta \tilde{\xi}$, avec

$$\Delta \tilde{\xi} = \frac{1}{32\pi^2} \log \frac{M_K^2}{\bar{M}_K^2}, \quad (3.81)$$

qui a un impact numérique très faible sur les résultats, à l'instar de ΔZ^S pour $X(3)$. On obtient l'équation:

$$\left[\frac{F(2)}{F_\pi} \right]^2 = [1 - \tilde{\eta}] \frac{r}{r+2} + \frac{2}{r+2} \left[\frac{F(3)}{F_\pi} \right]^2 - \frac{rX(3)}{r+2} \phi \left[\frac{F_\pi}{F(3)} \right]^2 - \frac{r}{r+2} \varepsilon_F, \quad (3.82)$$

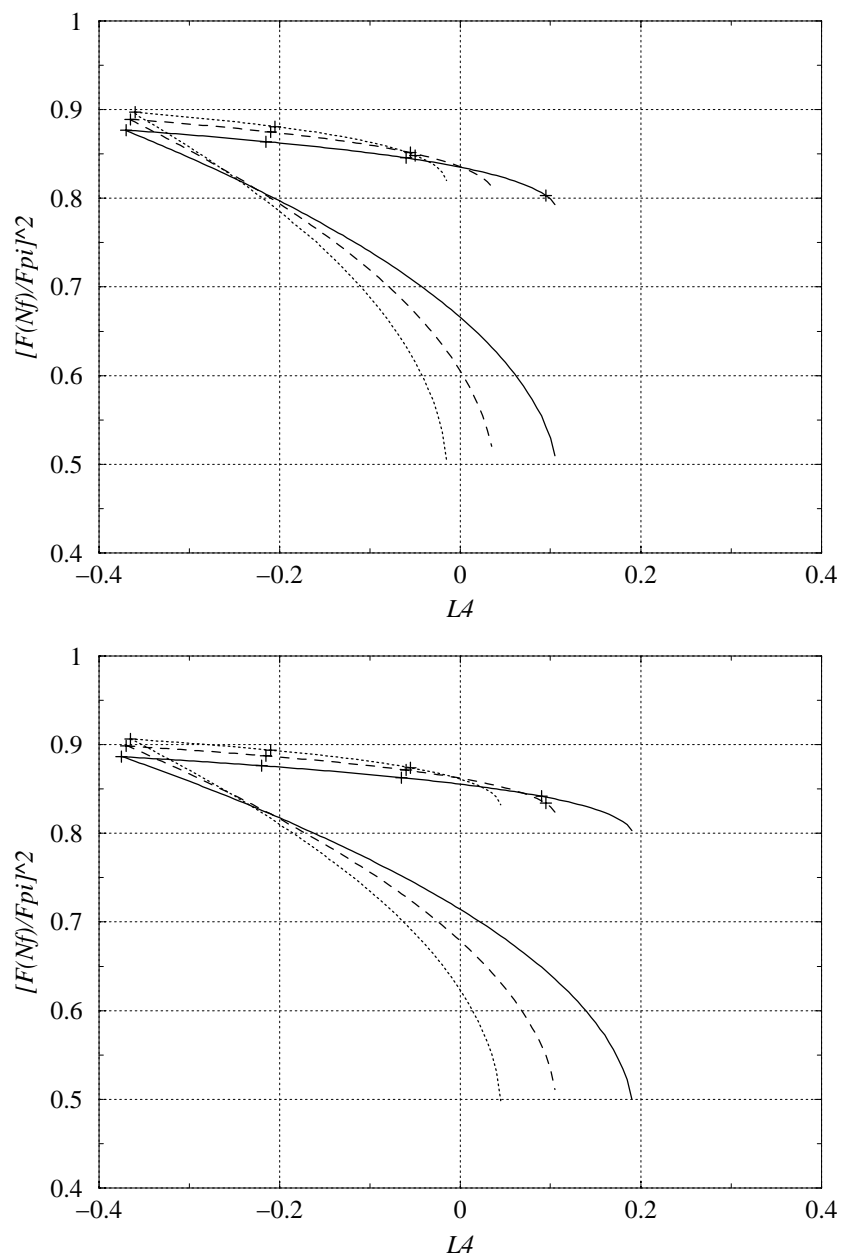


FIG. 3.4 – $F(2)$ (lignes munies des croix) et $F(3)$ (lignes sans symbole) en fonction de $L_4(M_\rho) \cdot 10^3$ et $r = m_s/m$ (traits pleins: $r = 20$, tirets: $r = 25$, pointillés: $r = 30$) pour $X(3)=0.9$ (haut) et 0.8 (bas).

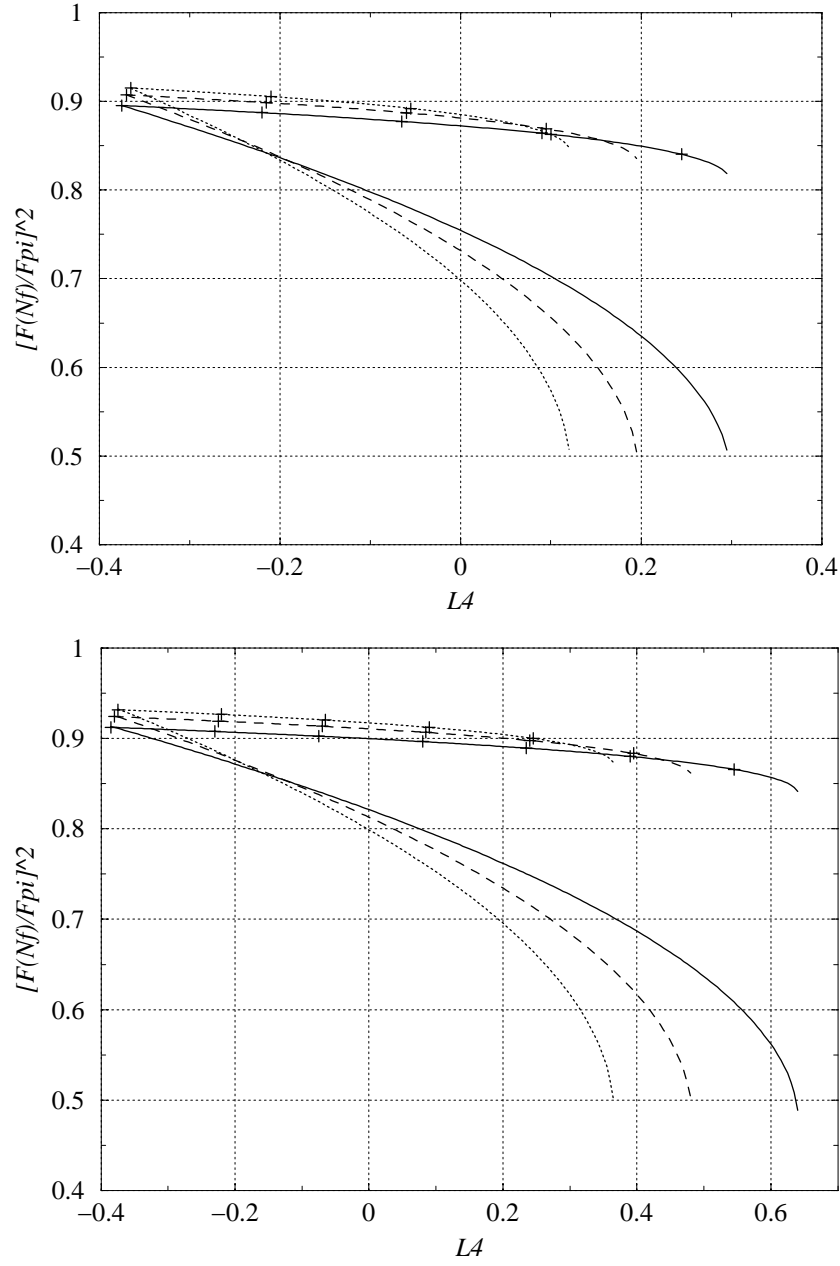


FIG. 3.5 – $F(2)$ (lignes munies des croix) et $F(3)$ (lignes sans symbole) en fonction de $L_4(M_\rho) \cdot 10^3$ et $r = m_s/m$ (traits pleins: $r = 20$, tirets: $r = 25$, pointillés: $r = 30$) pour $X(3)=0.7$ (haut) et 0.5 (bas).

avec

$$\varepsilon_F = \frac{r+1}{r-1} \frac{\varepsilon_\pi}{F_\pi^2} - \frac{r+2}{r} \frac{\varepsilon_2}{F_\pi^2} - \left(\tilde{\eta} + \frac{2}{r-1} \right) \frac{\varepsilon_K}{F_K^2} \quad (3.83)$$

$$= \frac{1}{F_\pi^2} \left[\frac{r+1}{r-1} \varepsilon_\pi - \frac{r+2}{r} \lim_{m \rightarrow 0} \varepsilon_\pi \right] - \left(\tilde{\eta} + \frac{2}{r-1} \right) \frac{\varepsilon_K}{F_K^2}, \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} \phi = \frac{1}{32\pi^2} \frac{M_\pi^2}{F_\pi^2} & \left[\frac{4r+1}{r-1} \log \frac{M_K^2}{M_\pi^2} + \frac{2r+1}{r-1} \log \frac{M_\eta^2}{M_K^2} \right. \\ & \left. + (r+2) \log \frac{\tilde{M}_K^2}{M_K^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Il est intéressant de comparer l'expression de $F(2)$ en fonction de $F(3)$ avec (3.63), qui donne $X(2)$ en fonction de $X(3)$. Si la structure est superficiellement analogue, nous remarquons que (3.63) était une fonction quadratique de $X(3)$, alors que (3.82) fait intervenir $(F(3)/F_\pi)^2$ et son inverse $(F_\pi/F(3))^2$. De plus, (3.82) est une fonction croissante de $F(3)$, alors que $X(2)$ n'est pas une fonction monotone de $X(3)$. On voit en revanche que ε_F supprime les restes ε_P/F_P^2 par un facteur m/m_s , de manière similaire à δ_X .

L'inégalité paramagnétique $F(2) \geq F(3)$ se traduit donc par une borne supérieure pour $F(3)$:

$$\frac{F(3)^2}{F_\pi^2} \leq \frac{1 - \tilde{\eta} - \varepsilon_F + \sqrt{(1 - \tilde{\eta} - \varepsilon_F)^2 - 4\phi X(3)}}{2}. \quad (3.86)$$

Un calcul rapide permet de se convaincre que la condition $X(3) \leq (1 - \tilde{\eta} - \varepsilon_F)^2/(4\phi)$ est satisfaite pour tout r entre \tilde{r}_1 et \tilde{r}_2 (il suffit d'avoir $X(3) < 2.2$).

Cette borne paramagnétique se traduit également par la borne sur $L_4(\mu)$:

$$L_4(\mu) > \frac{1}{256\pi^2} \log \frac{\tilde{M}_K^2}{\mu^2}, \quad (3.87)$$

qui correspond à $-0.37 \cdot 10^{-3}$ à l'échelle $\mu = M_\rho$. On peut voir les courbes de $F(2)$ et $F(3)$ se rejoindre pour cette valeur sur les Figs. 3.4 et 3.5.

Puisque $\phi > 0$, (3.79) et (3.86) aboutissent à l'encadrement:

$$\frac{1 - \tilde{\eta} - \varepsilon}{2} \leq \frac{F(3)^2}{F_\pi^2} \leq 1 - \tilde{\eta} - \max(\varepsilon_F, \varepsilon). \quad (3.88)$$

où on a combiné les deux bornes supérieures issues de (3.79) et (3.86), identiques aux restes ε et ε_F près. Les bornes inférieure et supérieure sur $F(3)$ ainsi obtenues sont indiquées sur la Fig. 3.6 (en négligeant les restes ε et ε_F).

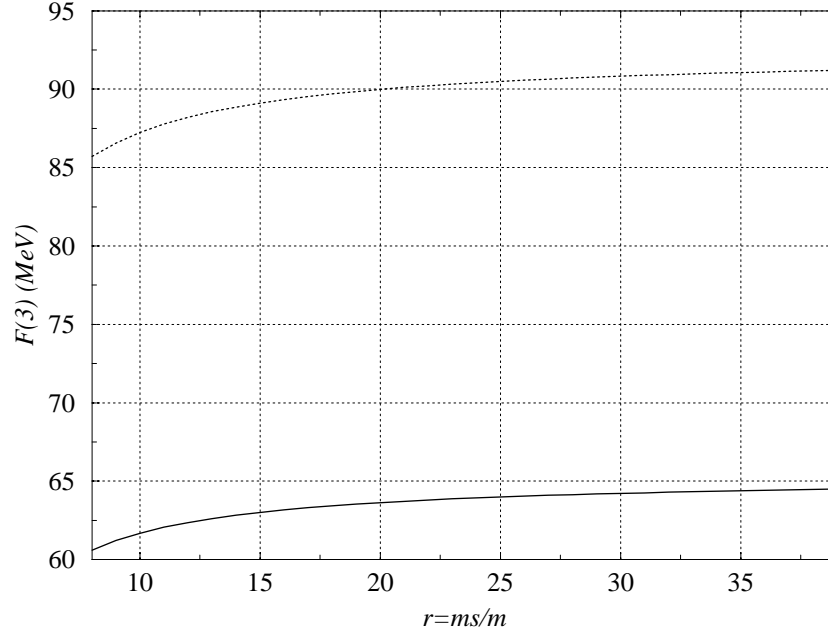


FIG. 3.6 – Bornes pour $F_0 \equiv F(3)$. La borne inférieure (trait plein) provient de l'existence d'une solution pour l'équation (3.75), la borne supérieure (pointillés) de l'inégalité paramagnétique $F(2) \geq F(3)$ (avec $X(3) = 0$).

La Table 3.2 indique, pour quelques valeurs de r , les bornes correspondantes pour $F(2)$ obtenues grâce à (3.82). Elle indique également les valeurs de $X(3)$ et $F(3)$ qui saturent les deux bornes paramagnétiques $F(2) = F(3)$ et $X(2) = X(3)$. Cela correspond au scénario où la règle de Zweig n'est violée nulle part (masses et constantes de désintégration).

3.8 Constantes de basse énergie

On peut utiliser les équations (3.56), (3.58), (3.72) et (3.73) pour calculer les constantes de basse énergie $L_{i=4,5,7,8}$ en fonction de r , F_0 et $X(3)$. On peut alors utiliser (3.54) afin d'exprimer L_4 , L_5 , L_7 et L_8 comme fonctions de L_6 , F_0 et r . Les résultats sont affichés dans les Tables 3.3 et 3.4 comme fonction de L_6 pour deux valeurs de F_0 et trois valeurs de r .

Ces tables ont été obtenues en négligeant les restes d'ordre supérieur δ_P et ϵ_P . Si ces restes sont de taille notable, les valeurs proposées dans ces tables devraient être nettement modifiées. Si nous considérons toujours les constantes de basse énergie comme fonctions de $L_6(M_\rho)$, et que nous faisons

r	$F(2)$ [MeV]		Règle de Zweig	
	min	max	F [MeV]	X
10	81.3149	87.2418	85.5733	0.403481
15	82.3415	89.1183	86.1716	0.750859
20	83.0197	89.9935	86.7114	0.85973
25	83.3764	90.5001	87.082	0.905411
30	83.4336	90.8305	87.3458	0.927822
35	83.1392	91.063	87.5453	0.93994

TAB. 3.2 – *A gauche, bornes pour $F(2)$ obtenues à partir des bornes pour $F(3)$ (Fig. 3.6). La borne inférieure vient de l'existence d'une solution pour (3.75), la borne supérieure est déduite de l'inégalité paramagnétique: $F(2) \geq F(3)$ avec $X(3) = 0$. A droite, valeurs de $F(3)$ et $X(3)$ saturant les deux inégalités paramagnétiques: $F(2) = F(3)$ et $X(2) = X(3)$.*

varier la taille des restes NNLO dans une fourchette de 5%, les variations correspondantes de $X(3)$ seraient d'ordre ± 0.02 , et se répercuteraient sur les $L_i(M_\rho)$ avec une ampleur d'autant plus grande que $X(3)$ est petit (d'ordre $\pm 0.3 \cdot 10^{-3}$ pour $X(3) \sim 0.8$, $r \sim 25$).

La Ref. [60] estime les restes NNLO dans le cas Standard. Elle pose $L_4(M_\rho) = L_6(M_\rho) = 0$ et $r = 24$, estime les contre-termes d'ordre Standard $O(p^6)$ en saturant les corrélateurs associés avec des résonnances, et procède à un ajustement global sur les données disponibles (masses, constantes de désintégrations, facteurs de forme). Pour les constantes de désintégration, les restes NNLO ϵ_P sont de l'ordre de 5%. La situation est moins claire pour les masses, car on observe une mauvaise convergence de la série. On a par exemple $M_\pi^2/(M_\pi^2)_{\text{phys}} = 0.746 + 0.007 + 0.247$, où les trois termes correspondent respectivement au terme dominant, NLO et NNLO [$O(m)$, $O(m^2)$ et $O(m^3)$]. Ref. [60] suggère qu'en variant $L_4(M_\rho)$ et $L_6(M_\rho) = 0$, il est possible de réduire la contribution NNLO, mais le terme $O(m^2)$ entre alors en compétition avec le terme dominant.

Cette situation, inacceptable dans le cadre Standard, a justement constitué notre cadre d'étude. Il conviendrait de reprendre l'analyse de Ref. [60] en autorisant une compétition entre les termes linéaires et quadratiques en masse de quarks dans les expansions des masses pseudoscalaires. On peut espérer que les problèmes de convergence observés par Ref. [60] seront alors résolus. Si ce n'était pas le cas, et si les restes d'ordre supérieur devaient être réellement de grande taille, il faudrait s'interroger sur la pertinence du développement en puissances de masse de quarks, qui est un élément essentiel de la Théorie des Perturbations Chirale.

L_6	$r = 20$				$r = 25$				$r = 30$			
	4	5	7	8	4	5	7	8	4	5	7	8
-0.2	0.068	1.833	-0.816	1.653	-0.013	1.174	-0.325	0.586	-0.065	0.782	-0.117	0.124
-0.15	0.102	1.966	-0.910	1.859	0.021	1.300	-0.373	0.697	-0.029	0.906	-0.139	0.182
-0.1	0.133	2.088	-0.999	2.056	0.053	1.414	-0.420	0.804	0.002	1.014	-0.161	0.236
-0.05	0.162	2.201	-1.088	2.249	0.081	1.519	-0.465	0.908	0.029	1.112	-0.182	0.289
0.	0.190	2.310	-1.176	2.442	0.108	1.616	-0.509	1.008	0.055	1.203	-0.202	0.340
0.05	0.216	2.409	-1.258	2.622	0.133	1.707	-0.552	1.106	0.079	1.287	-0.222	0.389
0.1	0.241	2.505	-1.341	2.803	0.156	1.793	-0.595	1.203	0.102	1.366	-0.241	0.438
0.2	0.287	2.684	-1.503	3.156	0.200	1.953	-0.678	1.391	0.144	1.513	-0.290	0.533
0.3	0.329	2.849	-1.661	3.499	0.240	2.099	-0.758	1.574	0.182	1.646	-0.317	0.625
0.4	0.368	3.002	-1.814	3.833	0.277	2.234	-0.837	1.751	0.217	1.770	-0.354	0.715
0.6	0.440	3.286	-2.116	4.490	0.345	2.484	-0.992	2.100	0.282	1.997	-0.426	0.892
0.8	0.507	3.544	-2.409	5.128	0.407	2.709	-1.142	2.441	0.339	2.198	-0.496	1.063
1.	0.567	3.781	-2.696	5.751	0.463	2.915	-1.291	2.774	0.392	2.384	-0.565	1.232

TAB. 3.3 – Constantes de basse énergie $L_i(M_\rho) \cdot 10^3$ en fonction de $L_6(M_\rho) \cdot 10^3$ et de $r = m_s/m$, pour $F_0 = 75$ MeV.

L_6	$r = 20$				$r = 25$				$r = 30$			
	4	5	7	8	4	5	7	8	4	5	7	8
-0.2	-0.284	2.410	-1.259	2.624	-0.282	1.603	-0.503	0.994	-0.284	1.130	-0.185	0.298
-0.15	-0.273	2.522	-1.356	2.835	-0.271	1.713	-0.555	1.112	-0.273	1.235	-0.209	0.358
-0.1	-0.264	2.628	-1.452	3.044	-0.261	1.812	-0.604	1.224	-0.262	1.332	-0.233	0.416
-0.05	-0.255	2.728	-1.545	3.247	-0.251	1.905	-0.652	1.334	-0.252	1.417	-0.254	0.470
0.	-0.246	2.824	-1.636	3.445	-0.242	1.993	-0.699	1.440	-0.243	1.501	-0.276	0.525
0.05	-0.238	2.915	-1.725	3.640	-0.234	2.076	-0.745	1.544	-0.235	1.578	-0.297	0.577
0.1	-0.230	3.000	-1.812	3.829	-0.226	2.156	-0.791	1.647	-0.226	1.653	-0.319	0.630
0.2	-0.215	3.167	-1.986	4.207	-0.210	2.306	-0.880	1.848	-0.211	1.790	-0.360	0.730
0.3	-0.201	3.321	-2.154	4.572	-0.196	2.442	-0.965	2.040	-0.197	1.917	-0.400	0.829
0.4	-0.188	3.466	-2.318	4.930	-0.184	2.572	-1.050	2.232	-0.184	2.036	-0.439	0.925
0.6	-0.164	3.735	-2.639	5.627	-0.155	2.811	-1.215	2.602	-0.159	2.253	-0.516	1.112
0.8	-0.141	3.981	-2.951	6.304	-0.136	3.027	-1.375	2.962	-0.137	2.449	-0.591	1.293
1.	-0.121	4.209	-3.256	6.966	-0.116	3.228	-1.532	3.314	-0.117	2.631	-0.664	1.471

TAB. 3.4 – Constantes de basse énergie $L_i(M_\rho) \cdot 10^3$ en fonction de $L_6(M_\rho) \cdot 10^3$ et de $r = m_s/m$, pour $F_0 = 85$ MeV.

i	$L_i(M_\rho) \cdot 10^3$	Origine
1	0.4 ± 0.3	K_{e4} , ondes D $\pi\pi$, Règle de Zweig
2	1.35 ± 0.3	K_{e4} , ondes D $\pi\pi$
3	-3.5 ± 1.1	K_{e4} , ondes D $\pi\pi$, Règle de Zweig
4	-0.3 ± 0.5	Règle de Zweig
5	1.4 ± 0.5	F_K/F_π
6	-0.2 ± 0.3	Règle de Zweig
7	-0.4 ± 0.2	Gell-Mann–Olubo, L_5 , L_8
8	0.9 ± 0.3	$M_{K^0} - M_{K^+}$, L_5 , $(2m_s - m_u - m_d)/(m_d - m_u)$
9	6.9 ± 0.7	$\langle r^2 \rangle_V^\pi$
10	-5.5 ± 0.7	$\pi \rightarrow e\nu\gamma$

TAB. 3.5 – Valeurs des constantes de basse énergie $O(p^4)$ standard données dans Ref. [63].

Les valeurs standard des constantes de basses énergie sont rappelées dans la Table 3.5. Ces valeurs supposent la suppression de $L_6(\mu)$ et $L_4(\mu)$ en invoquant la règle de Zweig à l'échelle $\mu = M_\eta$. Elles sont évidemment compatibles avec notre analyse. On peut le voir sur les premières lignes de la Table 3.4, qui correspondent à $X(2) \sim X(3) \sim 0.9$, $r = 25$, $F_0 = 85$ MeV. Les valeurs de $L_4(M_\rho)$ et $L_6(M_\rho)$ indiquées dans la Table 3.5 sont en accord avec les bornes inférieures obtenues en saturant les inégalités paramagnétiques pour F et X . Les valeurs standard indiquées sur cette table correspondent à $X(2) = X(3)$ et $F(2) = F(3)$.

L'analyse des masses et des constantes de désintégrations pseudoscalaires ne permet pas de conclure que les fluctuations de $\bar{q}q$ ont des effets importants sur la structure chirale du vide. On remarquera toutefois que la détermination des constantes de basse énergie est extrêmement sensible à la valeur choisie pour $L_6(M_\rho)$. Un faible déplacement de L_6 vers des valeurs positives écarterait fortement $X(2)$ et $X(3)$, et augmenterait nettement $L_8(M_\rho)$ et $L_5(M_\rho)$.

La Table 3.5 indique l'origine expérimentale ou théorique des estimations des L_i dans le cadre standard. Il semblerait par exemple que la détermination de L_5 , L_7 et L_8 est indépendante de L_4 et de L_6 . Mais il faut se souvenir de la procédure suivie pour déterminer ces constantes. On considère l'expression de diverses observables dans le cadre standard à une boucle. On voit apparaître à l'ordre $O(p^4)$ des logarithmes, tels que $(mB_0)^2 \log(M_P^2/\mu^2)$ pour $F_P^2 M_P^2$. On remplace dans ces logarithmes les facteurs $2mB_0$ par M_π^2 et $(m + m_s)B_0$ par M_K^2 . L'erreur commise est d'ordre $O(p^6)$. On combine les expressions ainsi obtenues pour isoler l'une des constantes désirées.

Mais dès que $L_6(M_\rho)$ quitte la borne inférieure $-0.2 \cdot 10^{-3}$ pour se diriger vers les valeurs positives, $X(3)$ diminue fortement. Le remplacement de $2mB_0$ par M_π^2 et de $(m + m_s)B_0$ par M_K^2 n'est alors plus justifié. Pour résumer, la détermination de L_5 , L_7 et L_8 est dépendante de la taille de $X(3)$ et donc de la valeur de L_6 .

3.9 Conséquences pour la diffusion $\pi\pi$

L'analyse des expériences devrait nous permettre bientôt de fixer $X(2)$. Nous avons vu que ce dernier était fortement corrélé à $r = m_s/m$. Si $X(2)$ n'est pas proche de 1, le rapport $r = m_s/m$ doit être nettement plus petit que la valeur standard de 25. Mais même si $X(2)$ s'avère grand (par exemple, 0.8-0.9 avec $r \sim 20 - 30$), ce qui justifierait l'utilisation de χ PT Standard pour $N_f = 2$, $X(3)$ reste inaccessible.

Si nous étudions la diffusion $\pi\pi$, les paramètres décrivant l'amplitude $A(s, t, u)$ autour du point symétrique $s = t = u = 4M_\pi^2/3$ permettent de déterminer $X(2)$. Dans le cadre Standard à 2 saveurs, on a:

$$X(2)^{\text{std}} = 1 - \frac{M_\pi^2}{32\pi^2 F_\pi^2} [4\bar{l}_4 - \bar{l}_3] + O(p^6). \quad (3.89)$$

avec les constantes de basse énergie indépendantes d'échelle \bar{l}_3 et \bar{l}_4 , qui apparaissent dans les expansions:

$$M_\pi^2 = \frac{2m\Sigma(2)}{F(2)^2} - \frac{4m^2\Sigma(2)^2}{32\pi^2 F(2)^4} \bar{l}_3 + O(p^6), \quad (3.90)$$

$$F_\pi^2 = F(2)^2 + \frac{m\Sigma(2)}{4\pi^2 F(2)^2} \bar{l}_4 + O(p^6) \quad (3.91)$$

\bar{l}_4 peut être déterminé à l'aide du rayon scalaire du pion, mais \bar{l}_3 devrait être mesuré par la diffusion $\pi\pi$. Si on se place dans le cadre Standard pour $N_f = 2$ et $N_f = 3$, avec un rapport de Gell-Mann–Oakes–Renner d'ordre 1 dans les deux cas, on peut développer les constantes de basse énergie l_3 et l_4 de $\text{SU}_L(2) \otimes \text{SU}_R(2)$ en puissances de m_s , de façon à les comparer aux constantes de basse énergie de $\text{SU}_L(3) \otimes \text{SU}_R(3)$. La combinaison $l_3 + l_4$ correspond à $2L_6 + L_8$. Si nous avons des résultats très précis concernant la diffusion $\pi\pi$, nous devrions être en mesure de détecter une violation de la règle de Zweig. Mais il ne nous est pas permis de fixer L_6 en utilisant ces résultats expérimentaux, même dans le cadre standard. Or nous avons vu que $X(3)$ dépendait crucialement de la valeur précise de L_6 . Même en se restreignant à l'hypothèse standard [$X(3)$ grand], la diffusion $\pi\pi$ ne permet pas d'accéder au condensat de quarks pour $N_f = 3$.

3.10 Résumé

Après avoir rappelé quelques éléments de la Théorie de Perturbations Chirale, nous avons étudié l'expansion en masses de quarks des masses et des constantes de désintégration pseudoscalaires. Nous avons tronqué ces expansions, en ne conservant que les deux premières puissances de masses de quarks, et en supposant que les restes d'ordre supérieur [d'ordre $O(m_{\text{quark}}^3)$ pour $F_P^2 M_P^2$ et d'ordre $O(m_{\text{quark}}^2)$ pour F_P^2] sont petits. On peut réécrire ces expansions pour faire intervenir des constantes “effectives”, indépendantes d'échelle, qui combinent des logarithmes chiraux et des constantes de basse énergie. Les $F_P^2 M_P^2$ font intervenir $\Sigma(3)$, $F^2(3)$ et des constantes reliées à L_6 , L_7 et L_8 , tandis que F_P^2 fait apparaître $F^2(3)$ et des constantes reliées à L_4 et L_5 .

Nous ne considérons pas ces expansions dans le cadre de χ PT Standard à une boucle, puisque nous ne supposons pas que le condensat de quarks $\Sigma(3)$ domine les expansions des masses pseudoscalaires. Nous ne sommes pas non plus dans le cadre de χ PT généralisée à l'ordre des arbres, puisque les expansions incluent des logarithmes chiraux. Ces expansions relient des quantités expérimentales (masses et constantes de désintégration) à des constantes de basse énergie de la Théorie de Perturbations Chirale. Il est possible d'inverser ces relations : $L_{i=4\dots 8}$ [et donc $X(2)$ et $F(2)$] s'obtiennent alors comme fonctions de $F(3)$, $r = m_s/m$ et $X(3)$.

La variation du rapport de Gell-Mann–Oakes–Renner X entre $N_f = 2$ et $N_f = 3$ est gouvernée par L_6 . L'égalité $X(2) = X(3)$ (saturation de la borne paramagnétique) s'obtient pour $L_6(M_\rho) = -0.21 \cdot 10^{-3}$. Deux situations peuvent aboutir à un rapport de Gell-Mann–Oakes–Renner pour 3 saveurs $X(3)$ nettement inférieur à 1. Dans le premier cas, le rapport des masses de quarks r est nettement plus petit que 25, ce qui donne lieu à $X(2)$ et $X(3)$ petits [$X(2)$ est fortement corrélé à r]. Dans le second cas, il s'agit d'augmenter $L_6(M_\rho)$ par rapport à la valeur saturant la borne paramagnétique. En effet, il suffit que L_6 se décale légèrement vers les valeurs positives pour assister à un affaissement de $X(3)$, tandis que $X(2)$ reste quasiment constant. On pourrait alors avoir $X(2)$ grand et $X(3)$ petit, pourvu que la règle de Zweig soit fortement violée pour le corrélateur lié à L_6 .

Le même travail peut être effectué pour les constantes de désintégration. La différence entre $F^2(2)$ et $F^2(3)$ est liée à L_4 : l'égalité s'obtient pour $L_4(M_\rho) = -0.37 \cdot 10^{-3}$. Si $L_4(M_\rho)$ se dirige vers les valeurs positives, on assiste là encore à une séparation très rapide de $F^2(2)$ et $F^2(3)$. Pour $r = 25$, la saturation des inégalités paramagnétiques pour F^2 et X aboutit à $X(2) = X(3) = 0.9$ et $F(2) = F(3) = 87$ MeV. Ce scénario “ultra-standard” correspond aux valeurs minimales de L_4 et L_6 (pas de violation de la règle

de Zweig). Une légère dérive vers les valeurs positive suffit pour obtenir des schémas de brisure de la symétrie chirale très différents entre $N_f = 2$ et $N_f = 3$.

Même si nous ne connaissons pas encore la valeur de $X(2)$, il est donc intéressant d'étudier cette violation, et d'en voir les conséquences sur la structure chirale du vide entre $N_f = 2$ et $N_f = 3$.

Chapitre 4

Etude d'un théorème à basse énergie

La différence entre les condensats de quarks pour 2 et 3 saveurs légères est liée à un corrélateur violant la règle de Zweig dans le secteur scalaire 0^{++} . Une règle de somme permet d'évaluer ce corrélateur, en étudiant les facteurs de forme scalaires du pion et du kaon. L'étude de cette règle de somme suggère que la structure chirale du vide évolue fortement entre 2 et 3 saveurs, non seulement pour le condensat de quarks, mais aussi pour la constante de désintégration pseudoscalaire [22, 23].

4.1 Corrélateur de deux densités scalaires

Introduisons le corrélateur [65, 66]:

$$\Pi(p^2) = i \frac{mm_s}{M_\pi^2 M_K^2} \lim_{m \rightarrow 0} \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle 0 | T \{ \bar{u}u(x) \bar{s}s(0) \} | 0 \rangle, \quad (4.1)$$

qui est invariant sous le groupe de renormalisation de QCD, et viole la règle de Zweig dans le secteur 0^{++} . Ce corrélateur possède une étroite parenté avec Π_Z , introduit en Sec. 2.5.3, lié aux fluctuations des petites valeurs propres de l'opérateur de Dirac. Pour $m_s \neq 0$, Π est un paramètre d'ordre de $SU_L(2) \otimes SU_R(2)$, lié à la dérivée de $\Sigma(2)$ par rapport à m_s : $mm_s \partial \Sigma(2) / \partial m_s = M_\pi^2 M_K^2 \Pi(0)$.

Si nous reprenons l'analyse du spectre pseudoscalaire détaillée dans le chapitre précédent, nous pouvons partir de la relation entre r , $X(3)$ et $X(2)$ donnée par (3.63) pour calculer $\partial \Sigma(2) / \partial m_s$. $(\partial Z^S / \partial m_s)_{m=0}$ s'obtient grâce

à (3.45). On peut ainsi relier Z^S et $\Pi(0)$:

$$X(2) - X(3) = \frac{2mm_s}{F_\pi^2 M_\pi^2} Z^S|_{m=0} + \frac{m}{F_\pi^2 M_\pi^2} \lim_{m \rightarrow 0} \frac{F_\pi^2 \delta_\pi}{m} \quad (4.2)$$

$$= \frac{2M_K^2}{F_\pi^2} \Pi(0) + \frac{r[X(3)]^2}{32\pi^2} \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{F_0^4} \left(\bar{\lambda}_K + \frac{2}{9} \bar{\lambda}_\eta \right) + \frac{m}{F_\pi^2 M_\pi^2} \left(1 - m_s \frac{\partial}{\partial m_s} \right) \lim_{m \rightarrow 0} \frac{F_\pi^2 \delta_\pi}{m}, \quad (4.3)$$

avec les dérivées logarithmiques: $\bar{\lambda}_P = m_s \cdot \partial(\log \bar{M}_P^2)/\partial m_s$. Nous avons indiqué ici les ordres supérieurs $F_\pi^2 \delta_\pi$ dans l'expansion en masses de quarks de $F_\pi^2 M_\pi^2$. Le terme dominant en est $O(mm_s^2)$, de sorte que le dernier terme dans (4.3) devrait être $\sim (-\delta_\pi/M_\pi^2)$.

On voit que L_6 (ou la différence $X(2) - X(3)$) est une mesure de la violation de la règle de Zweig dans le secteur scalaire. On va essayer d'incorporer une information expérimentale sur cette violation, en évaluant $\Pi(0)$ à l'aide de la règle de somme:

$$\begin{aligned} \Pi(0) = & \frac{1}{\pi} \int_0^{s_1} ds \operatorname{Im} \Pi(s) \frac{1}{s} \left(1 - \frac{s}{s_0} \right) \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{s_1}^{s_0} ds \operatorname{Im} \Pi(s) \frac{1}{s} \left(1 - \frac{s}{s_0} \right) \\ & + \frac{1}{2i\pi} \int_{|s|=s_0} ds \Pi(s) \frac{1}{s} \left(1 - \frac{s}{s_0} \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ces trois termes vont être évalués à l'aide de techniques différentes:

- Pour $0 \leq \sqrt{s} \leq \sqrt{s_1} \sim 1.2$ GeV, on détermine la fonction spectrale $\operatorname{Im} \Pi$ en résolvant des équations d'Omnès-Muskhelishvili à deux canaux couplés pour différents modèles de matrice T dans le secteur scalaire.
- Pour $\sqrt{s_1} \leq \sqrt{s} \leq \sqrt{s_0} \sim 1.5$ GeV, on utilise la fonction spectrale obtenue en dessous de s_1 dans une autre règle de somme pour borner la contribution de l'intégrale.
- Pour $|s| = s_0$, on utilise l'expansion en produit d'opérateurs.

4.2 Comportement asymptotique de Π

L'OPE de Π est de la forme:

$$\Pi(p^2) = i \frac{mm_s}{M_\pi^2 M_K^2} \lim_{m \rightarrow 0} \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle 0 | T[\bar{u}u(x) \bar{s}s(0)] | 0 \rangle \quad (4.5)$$

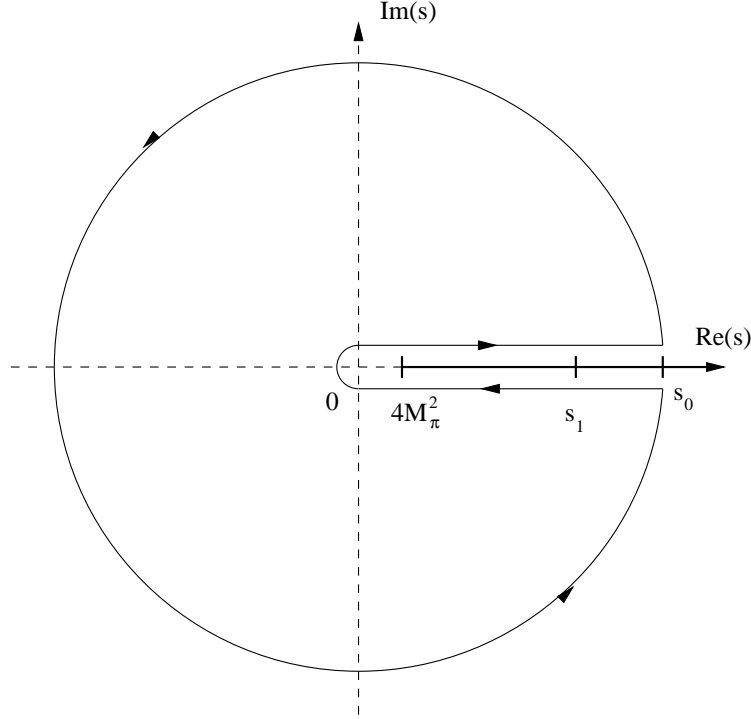


FIG. 4.1 – Contour de l'intégrale utilisée dans la règle de somme pour le corrélateur $\langle \bar{u}u \bar{s}s \rangle$.

$$\underset{P^2 \rightarrow \infty}{\sim} \frac{mm_s}{M_\pi^2 M_K^2} \sum_{n \geq 4} \frac{1}{(P^2)^{n/2-1}} C^{(n)}(t) \langle 0 | \mathcal{O}_n | 0 \rangle, \quad (4.6)$$

avec $P^2 = -p^2$, μ l'échelle de renormalisation, $t = \mu^2/P^2$, et \mathcal{O}_n une combinaison d'opérateurs de dimension n . Π se transforme chiralement comme $(\bar{u}u)(\bar{s}s)$ et on considère la limite chirale $m \rightarrow 0$. L'opérateur de plus basse dimension apparaissant dans OPE est donc $\mathcal{O}_4 = m_s \bar{u}u$. Les diagrammes contribuant à cet opérateur comprendront au moins deux lignes gluoniques.

On se place en régularisation dimensionnelle ($d = 4 - 2\omega$) et dans la famille des jauges de t'Hooft, où le propagateur du gluon est de la forme:

$$\frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right) \delta_{ab}, \quad (4.7)$$

où ξ est un paramètre réel libre. Le coefficient de Wilson de $m_s \bar{u}u$ (au premier ordre) s'obtient en faisant la somme de 6 intégrales à deux boucles. On s'aperçoit directement que les contributions en ξ et ξ^2 s'éliminent dans cette somme d'intégrales. On vérifie que le coefficient de Wilson de $m_s \bar{u}u$ (au

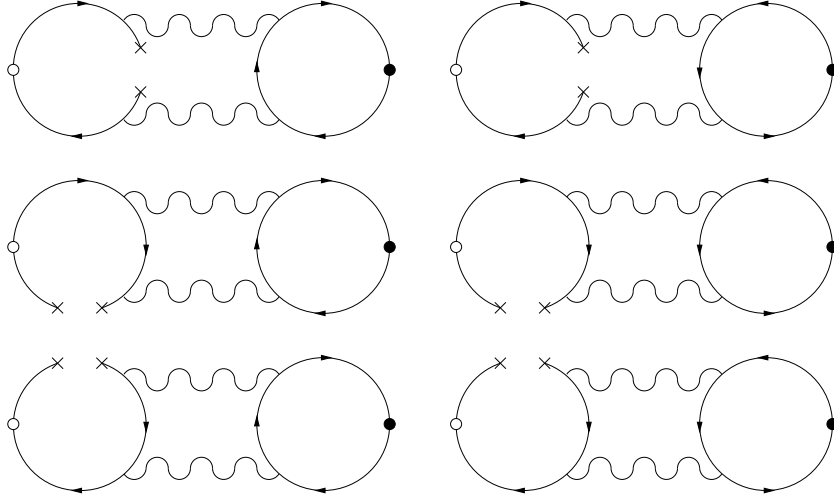


FIG. 4.2 – Diagrammes de Feynman contribuant à $m_s \langle \bar{u}u \rangle$ dans l'OPE de Π (ordre le plus bas en α_s). Le cercle blanc représente la source scalaire $\bar{u}u$, le cercle noir $\bar{s}s$.

premier ordre) est indépendant de la jauge choisie (au moins pour la famille des jauges de t'Hooft).

On cherche le comportement à grand P^2 d'intégrales de la forme:

$$g_s^4 \mu^{4\omega} m_s \langle \bar{u}u \rangle \frac{1}{p^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^d} \frac{d^4 k}{(2\pi)^d} \mathcal{P}(p^2, q^2, k^2, p \cdot q, p \cdot k, q \cdot k, m_s^2) \quad (4.8)$$

$$\times \frac{1}{[(p-q)^2 - m_0^2]^{n_2} [q^2 - m_0^2]^{n_3}}$$

$$\times \frac{1}{[(k+p)^2 - m_s^2]^{n_4} [(k+q)^2 - m_s^2]^{n_5} [k^2 - m_s^2]^{n_6}},$$

où \mathcal{P} est un polynôme de degré 2. m_0 correspond à la fois à $m = m_u = m_d$ pour les propagateurs fermioniques de la boucle de quark u , et à une masse fictive régularisant les divergences infrarouges gluoniques. On prendra la limite $m_0 \rightarrow 0$.

En utilisant des identités du type $2(k \cdot q) = [(k+q)^2 + m_s^2] - [k^2 + m_s^2] - q^2$, on se ramène à une somme d'intégrales de la forme:

$$\frac{1}{p^{2\nu_0}} J(\{\nu_i\}, \{m_i\}, p) = \frac{1}{p^{2\nu_0}} \int \frac{d^4 q \, d^4 k}{[q^2 - m_0^2]^{\nu_1} [k^2 - m_s^2]^{\nu_2}} \quad (4.9)$$

$$\times \frac{1}{[(k+q)^2 - m_s^2]^{\nu_3} [(p-q)^2 - m_0^2]^{\nu_4} [(k+p)^2 - m_s^2]^{\nu_5}},$$

avec $m_1 = m_4 = m_0$ et $m_2 = m_3 = m_5 = m_s$. Ces intégrales sont formellement identiques aux intégrales mises en jeu dans le calcul de *self-energies* à deux boucles. Le comportement de telles intégrales à grand moment extérieur a déjà été étudié: l'idée de base est de suivre le flux de ce grand moment extérieur à travers le diagramme de Feynman, afin de procéder à l'expansion de Taylor des propagateurs de manière judicieuse [67]. Cette procédure, qui s'appuie sur le théorème d'expansion asymptotique [68], est esquissée en Sec. C.1.

Après des calculs relativement longs, on obtient le premier terme de l'expansion en produit d'opérateurs. Certaines des intégrales considérées au cours du calcul contiennent des pôles en $1/\omega$, mais on constate que ces divergences s'éliminent quand on ajoute l'ensemble des contributions (cette élimination des divergences constitue une validation non-triviale de la procédure). Le premier terme d'OPE est:

$$\begin{aligned} & i \frac{m m_s}{M_\pi^2 M_K^2} \lim_{m \rightarrow 0} \int d^4 x \, e^{ip \cdot x} \langle 0 | T \{ m \bar{u} u(x) \, m_s \bar{s} s(0) \} | 0 \rangle \\ & \sim_{P^2 \rightarrow \infty} - \frac{18[1 - 2\zeta(3)]}{P^2} \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 \frac{m_s^2}{M_\pi^2 M_K^2} m \langle \bar{u} u \rangle. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Nous sommes dans la limite $m \rightarrow 0$, $m_s \neq 0$. Le condensat apparaissant ici doit être le condensat de quarks pour deux saveurs nulles.

4.3 Contribution pour $0 \leq s \leq s_1$

4.3.1 Equations d'Omnès-Muskhelishvili

Pour connaître l'intégrale:

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\pi} \int_0^{s_1} ds \, \text{Im} \, \Pi(s) \, \frac{1}{s} \left(1 - \frac{s}{s_0} \right), \quad (4.11)$$

il faut déterminer $\text{Im} \, \Pi$ entre 0 et s_1 ($\sqrt{s_1} \sim 1.2 \text{ GeV}$). $\pi\pi$ et $K\bar{K}$ devraient dominer la fonction spectrale dans ce domaine d'énergie. Aucune contribution de 4π et $\eta\eta$ n'est observée dans ce domaine d'énergie, et nous négligerons donc ces canaux (ils commencent à intervenir pour $\sqrt{s} \geq 1.2 \text{ GeV}$). Les canaux $\pi\pi$ et $K\bar{K}$ sont notés respectivement 1 et 2. La fonction spectrale s'exprime comme [65]:

$$\text{Im} \, \Pi(s) = \frac{m m_s}{M_\pi^2 M_K^2} \frac{1}{16\pi} \sum_{i=1,2} \sqrt{\frac{s - 4M_i^2}{s}} [n_i F_i(s)] [n_i G_i^*(s)] \theta(s - 4M_i^2), \quad (4.12)$$

avec les facteurs de forme scalaires du pion et du kaon:

$$\vec{F}(s) = \begin{pmatrix} \langle 0 | \bar{u}u | \pi\pi \rangle \\ \langle 0 | \bar{u}u | K\bar{K} \rangle \end{pmatrix}, \quad \vec{G}(s) = \begin{pmatrix} \langle 0 | \bar{s}s | \pi\pi \rangle \\ \langle 0 | \bar{s}s | K\bar{K} \rangle \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

On a noté $M_1 = M_\pi$ et $M_2 = M_K$. $n_1 = \sqrt{3/2}$ et $n_2 = \sqrt{2}$ sont des facteurs numériques liés à la normalisation différente des états $|\pi\pi\rangle$ et $|K\bar{K}\rangle$.

Les facteurs de forme sont des fonctions analytiques dans le plan complexe à l'exception d'une coupure sur la partie droite de l'axe réel. Si nous écrivons la matrice S comme:

$$S_{ij} = \delta_{ij} + 2i\sigma_i^{1/2}T_{ij}\sigma_j^{1/2}\theta(s - 4M_i^2)\theta(s - 4M_j^2), \quad \sigma_i = \sqrt{\frac{s - 4M_i^2}{s}}, \quad (4.14)$$

la discontinuité des facteurs de forme le long de la coupure s'écrira:

$$\text{Im } F_i(s) = \sum_{j=1}^n T_{ij}^*(s)\sigma_j(s)F_j(s)\theta(s - 4M_j^2). \quad (4.15)$$

Les facteurs de forme doivent tendre asymptotiquement vers 0 comme $F_i(s) \sim 1/s$ quand $s \rightarrow \infty$. Ils satisfont donc une relation de dispersion sans soustraction. De nouveaux canaux s'ouvrent évidemment quand l'énergie augmente, ce qui invalide l'approximation à deux canaux. Toutefois, nous désirons obtenir \vec{F} et \vec{G} pour $s \leq s_1$: l'allure des fonctions spectrales à beaucoup plus haute énergie ne nous intéresse pas. Nous pouvons donc supposer que (4.14) est valable à toute énergie, pourvu que la matrice T impose un bon comportement asymptotique aux facteurs de forme.

Sous ces hypothèses, les facteurs de forme \vec{F} et \vec{G} satisfont (séparément) un système d'équations couplées d'Omnès-Mushkelishvili [65, 69, 70, 71]:

$$F_i(s) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n \int_{4M_j^2}^{\infty} ds' \frac{1}{s' - s} T_{ij}^*(s') \sqrt{\frac{s' - 4M_j^2}{s'}} \theta(s' - 4M_j^2) F_j(s'), \quad (4.16)$$

à condition que la matrice T assure la décroissance des facteurs de forme pour $s \rightarrow \infty$. Remarquons que (4.16) nécessite de connaître la matrice T hors de la région physique. Par exemple, l'équation pour $F_{i=2}(s)$ fera intervenir $T_{21}(s')$ ($\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$) au sein d'une intégrale où s' varie de $4M_\pi^2$ à l'infini. D'après Muskhelishvili [70], (4.16) admet en général n solutions indépendantes $\vec{F}^{(1)}(s)$, $\vec{F}^{(2)}(s) \dots \vec{F}^{(n)}(s)$, que nous rassemblons dans la matrice \mathcal{F} de taille $n \times n$ et d'éléments: $\mathcal{F}_{ij} = F_i^{(j)}$.

4.3.2 Conditions sur la matrice T

Tous les éléments de \mathcal{F} sont des fonctions analytiques de s , avec une discontinuité le long de l'axe réel (4.14) qui peut s'écrire sous la forme matricielle:

$$\mathcal{F}(s + i\epsilon) = (1 + 2iT\Sigma)\mathcal{F}(s - i\epsilon), \quad \Sigma_{ij} = \delta_{ij}\sigma_i(s)\theta(s - 4M_i^2). \quad (4.17)$$

Si on prend le déterminant de cette équation matricielle, on obtient une équation unidimensionnelle:

$$f(s + i\epsilon) = D(s)f(s - i\epsilon), \quad f = \det \mathcal{F}. \quad (4.18)$$

Si $m < n$ canaux sont ouverts à l'énergie s , $D(s)$ est le déterminant de la matrice S de taille $m \times m$. Il s'agit donc d'un nombre complexe de module 1: $D(s) = \exp[2i\Delta(s)]$.

f est analytique (hormis le long de l'axe réel) et (4.18) peut être réécrite comme une équation d'Omnès. f sera donc de la forme:

$$f(s) = P(s)\Omega(s), \quad \Omega(s) = \exp \left[\frac{s}{\pi} \int_{4M_\pi^2}^{\infty} ds' \frac{1}{(s' - s)s'} \Delta(s') \right], \quad (4.19)$$

avec P un polynôme arbitraire. Une simple intégration par parties montre qu'à haute énergie ($s \rightarrow \infty$), on a: $\Omega(s) \rightarrow s^{-l}$ avec $l = [\Delta(\infty) - \Delta(4M_\pi^2)]/\pi$. On a supposé que les facteurs de forme décroissent asymptotiquement au moins aussi vite que $1/s$, donc $f = \det \mathcal{F}$ doit décroître au moins aussi vite que $1/s^n$. En comparant les deux comportements asymptotiques de f , on aboutit à la condition [65]:

$$\Delta(\infty) - \Delta(4M_\pi^2) \geq n\pi. \quad (4.20)$$

Si la différence est exactement $n\pi$, les facteurs de forme sont déterminés uniquement par leur valeur à l'origine (le polynôme arbitraire P se ramène à une constante de normalisation).

(4.20) peut s'interpréter comme une condition sur le comportement asymptotique de la matrice T . Dans le cas de deux canaux, la matrice S a pour structure:

$$S = \begin{bmatrix} \eta e^{2i\delta_1} & i(1 - \eta^2)^{1/2} e^{i(\delta_1 + \delta_2)} \\ i(1 - \eta^2)^{1/2} e^{i(\delta_1 + \delta_2)} & \eta e^{2i\delta_2} \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

On a donc $\Delta = \delta_1 + \delta_2$, et l'unicité de la solution est garantie pour: $\Delta(\infty) - \Delta(4M_\pi^2) = 2\pi$.

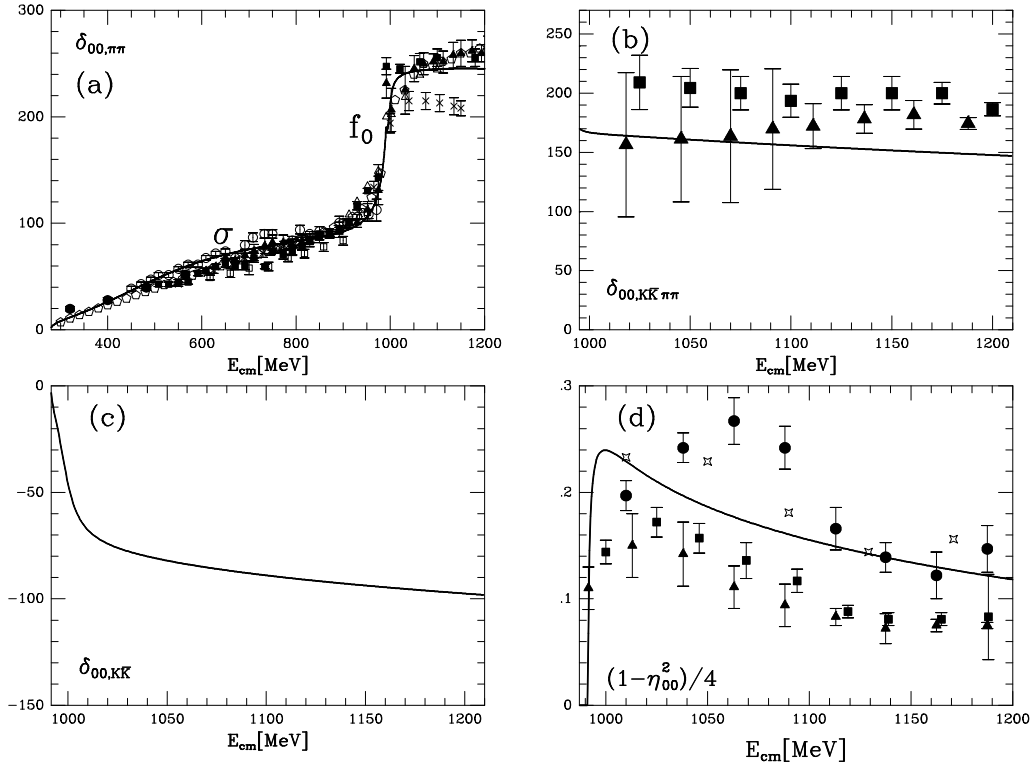


FIG. 4.3 – *Compilation de résultats expérimentaux extraite de Ref. [74]. La ligne pleine correspond au modèle de matrice T proposé dans cette référence. De gauche à droite et de haut en bas: déphasage $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ δ_1 , déphasage $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ $\delta_1 + \delta_2$, déphasage $K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}$ δ_2 et inélasticité $(1 - \eta^2)/4$.*

4.3.3 Modèles de matrice T

On veut modéliser la matrice T dans le secteur 0^{++} pour les deux canaux $\pi\pi$ et $K\bar{K}$. Les résultats expérimentaux obtenus pour les déphasages et l'inélasticité sont assez cohérents en-dessous de 1.4 GeV, comme le montre la compilation de la Fig. 4.3, mais ils autorisent diverses paramétrisations.

Truong et Wiley [72]

L'unitarité implique (sous forme matricielle):

$$\text{Im } T = T \cdot \Sigma \cdot T^*, \quad (4.22)$$

ce qui permet d'obtenir:

$$\Sigma = T^{-1} \cdot \text{Im } T \cdot (T^*)^{-1} = \frac{1}{2i} T^{-1} \cdot (T - T^*) \cdot (T^*)^{-1}$$

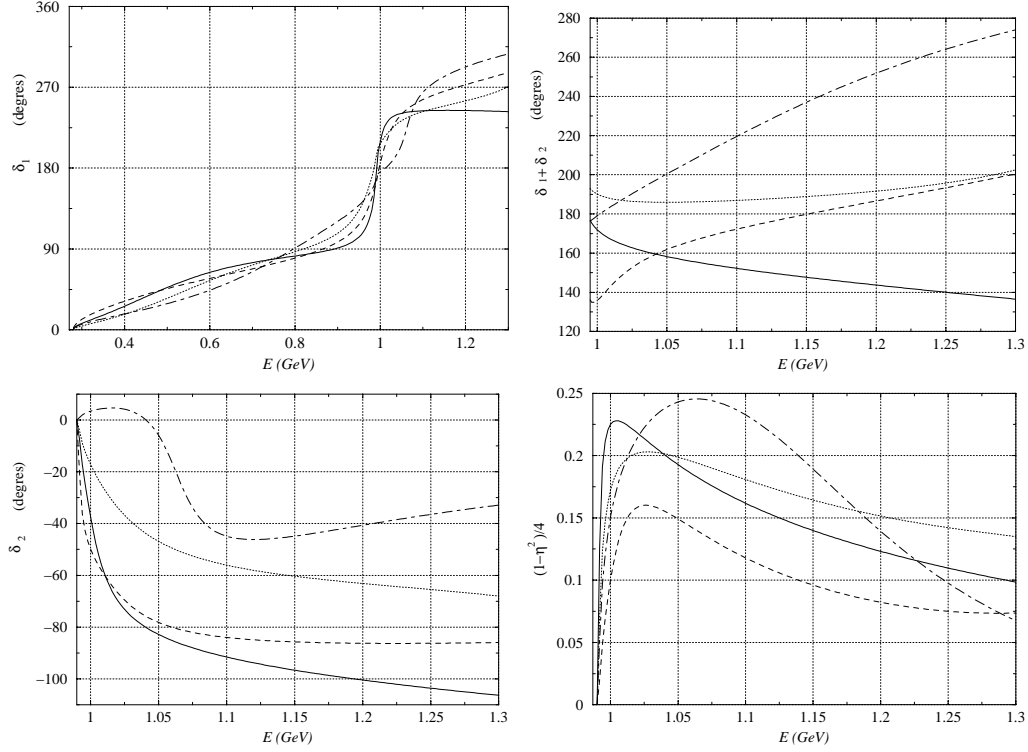


FIG. 4.4 – Modèles de matrice T utilisés: Ref. [74] (trait plein), Ref. [79] (pointillés), Ref. [77] (tirets) et Ref. [72] (tirets et pointillés alternés). De gauche à droite et de haut en bas: déphasage $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ δ_1 , déphasage $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ $\delta_1 + \delta_2$, déphasage $K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}$ δ_2 et inélasticité $(1 - \eta^2)/4$.

$$= \frac{1}{2i}(T^{-1*} - T^{-1}) = -\text{Im } T^{-1}. \quad (4.23)$$

Partant de cette relation, Truong et Willey ont proposé la paramétrisation suivante [72]:

$$\sqrt{s}T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{M_1^2 - s - i\Gamma_1\sqrt{s - 4M_1^2}}{\Gamma_1} & \lambda \\ \lambda & \frac{M_2^2 - s - i\Gamma_2\sqrt{s - 4M_2^2}}{\Gamma_2} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Les valeurs de M_i , Γ_i et λ ont été ajustées sur des données expérimentales [73]. Cette paramétrisation ne rend pas bien compte des données à partir du seuil de $K\bar{K}$. Elle ne sera donc pas exploitée pour estimer l'intégrale entre 0 et s_1 de la règle de somme (4.4).

En revanche, ce modèle de matrice T possède l'avantage de donner une forme analytique des facteurs de forme, car il ne possède pas de coupure à gauche. (4.15) admet pour solutions:

$$F_i(s) = \sum_{j=1}^n C_j \frac{T_{ji}(s)}{\sqrt{s}}, \quad (4.25)$$

où les C_j sont des constantes réelles fixées par la valeur en 0 des facteurs de forme. Le dénominateur \sqrt{s} est lié à la forme choisie pour la matrice T (les facteurs de forme n'ont pas de singularité au seuil). Le résultat analytique (4.25) peut être comparé aux solutions numériques des équations d'Omnès-Muskhelishvili détaillées dans la Sec. C.2. On constate que les solutions numériques et analytiques sont en excellent accord, ce qui montre la précision et la stabilité de la résolution numérique.

Oller, Oset et Pelaez [74]

On peut combiner (4.22) et (4.23) pour écrire:

$$T = [\text{Re } T^{-1} - i\Sigma]^{-1} = [\text{Re } T^{-1} - i\text{Im } G]^{-1}, \quad (4.26)$$

$$G_{nn}(s = P^2) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-16i\pi}{[q^2 - M_n^2 + i\epsilon][(P - q)^2 - M_n^2 + i\epsilon]}. \quad (4.27)$$

L'approche d'Oller, Oset et Pelaez [74] vise à étendre le domaine d'application de la Théorie de Perturbations Chirale Standard, en procédant à l'expansion de T^{-1} au lieu de T . Ceci permettrait d'éviter les problèmes de convergence rencontrés à proximité des poles de T (i.e. les resonances). On écrit:

$$T = T_2 + T_4 + \dots \quad T^{-1} = T_2^{-1}[1 - T_4 \cdot T_2^{-1}] + \dots \quad (4.28)$$

où T_i est la contribution standard d'ordre $O(p^i)$ à la matrice T , et les points de suspension désignent des contributions d'ordre $O(p^6)$. On aboutit à l'expression:

$$T = T_2 \cdot [T_2 - T_4]^{-1} \cdot T_2 + \dots \quad (4.29)$$

qui pourrait peut-être étendre le domaine de convergence de S χ PT au-delà des énergies habituellement mises en jeu.

Une approximation supplémentaire est faite dans Ref. [74]. Partant de l'égalité $\text{Im } T_4 = T_2 \cdot \text{Im } G \cdot T_2$, les auteurs ont supposé que l'on pouvait paramétrer la matrice T de la manière suivante:

$$T = T_2 \cdot [T_2 - T_4^P - T_2 \cdot G \cdot T_2]^{-1} \cdot T_2. \quad (4.30)$$

où T_4^P possède la même structure que la contribution en arbre provenant de \mathcal{L}_4 , mais où interviennent des coefficients \hat{L}_i *a priori* différents des constantes de basse énergie L_i . Ces coefficients sont ajustés à l'aide de données non seulement pour $(I, J) = (0, 0)$, mais aussi $(0, 1)$, $(1/2, 0)$, $(1/2, 1)$, $(1, 0)$ et $(1, 1)$ [75]. Ce modèle a été utilisé dans la Ref. [76] pour obtenir les facteurs de forme du pion et du kaon dans le cadre Standard.

La relation exacte entre ce modèle de matrice T et la Théorie de Perturbations Chirale Standard est une question complexe à laquelle nous n'essaierons pas de répondre ici. Nous nous contenterons de considérer (4.30) comme une paramétrisation possible de la matrice T .

Au, Morgan et Pennington [77]

Le modèle d'Au, Morgan et Pennington [77] est une paramétrisation de la matrice K [$T = K(1 - i\Sigma K)^{-1}$] de la forme:

$$K_{ij} = \frac{s - s_0}{4M_K^2} \sum_p \frac{f_i^p f_j^p}{(s_p - s)(s_p - s_0)} + \sum_{n=0} c_{ij}^n \left[\frac{s}{4M_K^2} - 1 \right]^n \quad (4.31)$$

s_0 correspond à un zéro d'Adler de la matrice T . Divers ensembles de paramètres sont proposés dans Ref. [77], suivant les données considérées. Nous considérons ici la paramétrisation K_1 (Etkin), obtenue en se limitant aux données d'Etkin *et al.* [78] pour le déphasage $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ ($p = 1$ et $n = 1 \dots 4$). Les auteurs de Ref. [71] ont remarqué la présence d'une résonnance superflue, très étroite, près du seuil de $K\bar{K}$. Elle peut être éliminée en interpolant linéairement le déphasage $\pi\pi$ dans l'intervalle d'énergie où cette résonnance apparaît [65].

Kamiński, Leśniak, Maillet et Loiseau [79]

Le modèle de matrice T proposé par Kamiński, Leśniak et Maillet (et étendu à trois canaux par Kamiński, Leśniak et Loiseau) [79] s'appuie sur des équations couplées de Lippmann-Schwinger (dans l'espace des moments) [80]:

$$\langle \mathbf{p} | T | \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{p} | V | \mathbf{q} \rangle + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \langle \mathbf{p} | V | \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{k} | H | \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{k} | T | \mathbf{q} \rangle, \quad (4.32)$$

où V et H sont des matrices 2×2 . H est la matrice diagonale des propagateurs (avec E l'énergie disponible dans le centre de masse) et V est un potentiel, choisi séparable:

$$\langle \mathbf{k} | H_{ij} | \mathbf{k} \rangle = \frac{\delta_{ij}}{E - 2\sqrt{k^2 + M_i^2} + i\epsilon}, \quad (4.33)$$

$$\langle \mathbf{p} | V_{ij} | \mathbf{q} \rangle = \sum_{l,m} \frac{\lambda_{lm}}{(p^2 + \mu_{il}^2)(q^2 + \mu_{jm}^2)}. \quad (4.34)$$

Le choix d'un potentiel séparable permet de résoudre analytiquement les équations (4.32). Les paramètres λ_{ij} et μ_{ij} sont ajustés pour reproduire les données considérées [73, 81].

Comportement au seuil et à l'infini

Aucun de ces modèles de matrice T ne se comporte “bien” quand $s \rightarrow \infty$, i.e. ne vérifie (4.20). Pour imposer le comportement désiré, on interpole les déphasages pour s au-delà d'une certaine énergie s_i :

$$\delta_1(s) = 2\pi + [\delta_1(s_i) - 2\pi] \cdot e\left(\frac{s}{s_i}\right), \quad \delta_2(s) = \delta_2(s_i) \cdot e\left(\frac{s}{s_i}\right), \quad (4.35)$$

où $e(x) = 1/(1 + x^3)$ [la forme exacte de e n'importe guère]. On choisit $\sqrt{s_i} = 1.5$ GeV pour Refs. [77] et [79], et $\sqrt{s_i} = 1.2$ GeV pour Ref. [74], ce qui correspond aux énergies où les modèles ne sont plus en accord avec les données expérimentales. On pourrait choisir des s_i plus élevés, mais les facteurs de forme seraient modifiés seulement à “haute” énergie (au-dessus de 1.3 GeV). On remarque que la condition (4.20) est cruciale pour assurer la résolution numérique des équations d'Omnès-Muskhelishvili (sans elle, la méthode est instable et fournit des solutions oscillantes).

Remarquons également que ces modèles n'ont pas nécessairement un bon comportement au seuil de $\pi\pi$ (certains modèles aboutissent à des longueurs de diffusion trop grandes). On a donc remplacé au seuil ces modèles par une paramétrisation à la Schenk [82] ajustée sur les données expérimentales des Refs. [83]:

$$\tan \delta_\pi^S(s) = \sqrt{1 - \frac{4M_\pi^2}{s}} \left(\frac{4M_\pi^2 - \tilde{s}}{s - \tilde{s}} \right) (a_0^0 + cp^2 + dp^4), \quad p^2 = \frac{s}{4M_\pi^2} - 1, \quad (4.36)$$

en s'assurant un raccordement continu de δ_π^S avec le modèle considéré. Cette modification à très basse énergie du déphasage $\pi\pi$ altère légèrement les solutions numériques des facteurs de formes à “haute” énergie (au-dessus de 1.1 GeV), mais elle n'affecte pas l'intégrale entre 0 et s_1 .

4.3.4 Contribution à la règle de somme

Les équations d'Omnès-Muskhelishvili (4.16) sont linéaires. De plus, si le modèle de matrice T se comporte bien à grande énergie, ces équations

admettent une solution unique, une fois la valeur en un point fixée. Les solutions s'écrivent donc toutes comme des combinaisons linéaires d'une base de solutions. Soient $\vec{A}(s)$ et $\vec{B}(s)$ les solutions telles que

$$\vec{A}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{B}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

La Sec. C.2 détaille la résolution numérique des équations couplées d'Omnès-Muskhelishvili. \vec{F} et \vec{G} seront des combinaisons linéaires de ces deux solutions:

$$\vec{F}(s) = F_1(0)\vec{A}(s) + F_2(0)\vec{B}(s), \quad \vec{G}(s) = G_1(0)\vec{A}(s) + G_2(0)\vec{B}(s). \quad (4.38)$$

La valeur des facteurs de forme à impulsion nulle est reliée aux dérivées des masses des pseudoscalaires par rapport aux masses de quarks:

$$F_1(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_\pi^2}{\partial m} \right)_{m=0}, \quad F_2(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_K^2}{\partial m} \right)_{m=0}, \quad (4.39)$$

$$G_1(0) = \left(\frac{\partial M_\pi^2}{\partial m_s} \right)_{m=0} = 0, \quad G_2(0) = \left(\frac{\partial M_K^2}{\partial m_s} \right)_{m=0}. \quad (4.40)$$

Si on reporte cette expression des facteurs de forme scalaire dans (4.12), on obtient la fonction spectrale comme une somme de deux contributions:

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi(s) = & \gamma_\pi \lambda_K \left[\frac{\sqrt{3}}{32\pi} \sum_{i=1,2} \sqrt{\frac{s - 4M_i^2}{s}} A_i(s) B_i^*(s) \theta(s - 4M_i^2) \right] \\ & + \gamma_K \lambda_K \frac{M_K^2}{M_\pi^2} \left[\frac{1}{16\pi} \sum_{i=1,2} \sqrt{\frac{s - 4M_i^2}{s}} B_i(s) B_i^*(s) \theta(s - 4M_i^2) \right], \end{aligned} \quad (4.41)$$

où apparaissent les dérivées logarithmiques des masses:

$$\lambda_P = \frac{m_s}{M_P^2} \left(\frac{\partial M_P^2}{\partial m_s} \right)_{m=0} = \frac{m_s}{M_P^2} \frac{\partial \bar{M}_P^2}{\partial m_s}, \quad \gamma_P = \frac{m}{M_P^2} \left(\frac{\partial M_P^2}{\partial m} \right)_{m=0}. \quad (4.42)$$

On peut tracer les deux fonctions entre crochets dans (4.41): la première est dite de type AB^* , la seconde de type BB^* . On peut également regarder comment ces deux contributions se compensent au sein de la fonction spectrale, en prenant des estimations "standard" des dérivées logarithmiques: $\gamma_\pi = 1$, $\lambda_K = 1 - M_\pi^2/(2M_K^2)$ et $\gamma_K = M_\pi^2/(2M_K^2)$. On voit apparaître un pic correspondant à la résonance étroite $f_0(980)$ [47], plus ou moins marqué suivant les modèles: Ref. [74] donne lieu à un pic modeste si on le compare aux Refs. [77] et [79].

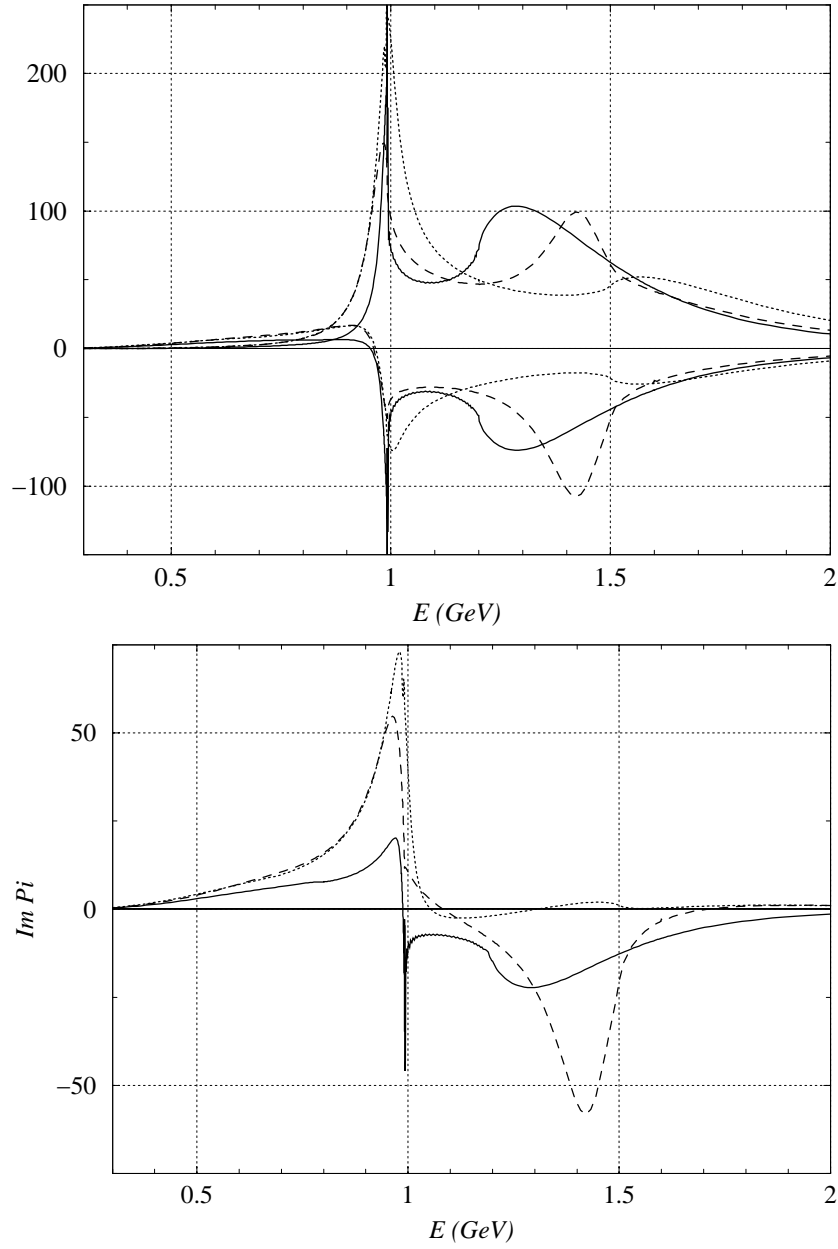


FIG. 4.5 – En haut: contributions de type BB^* (positives) et de type AB^* (négatives) à la fonction spectrale. En bas: exemple de fonction spectrale obtenue avec $\gamma_\pi = 1$, $\lambda_K = 1 - M_\pi^2/(2M_K^2)$ et $\gamma_K = M_\pi^2/(2M_K^2)$. Pour les modèles de matrice T : Ref. [74] (trait plein), Ref. [79] (tirets) et Ref. [77] (pointillés).

L'intégrale entre 0 et s_1 de la règle de somme (4.4) s'écrit grâce à (4.41):

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{s_1} ds \operatorname{Im} \Pi(s) \frac{1}{s} \left(1 - \frac{s}{s_0}\right) = \gamma_\pi \lambda_K \mathcal{I}_{AB} + \gamma_K \lambda_K \frac{M_K^2}{M_\pi^2} \mathcal{I}_{BB} \quad (4.43)$$

avec les moments:

$$\mathcal{I}_{XY} = \mathcal{M}_{XY}^{(-1)} - \frac{1}{s_0} \mathcal{M}_{XY}^{(0)}, \quad (4.44)$$

$$\mathcal{M}_{AB}^{(k)} = \frac{\sqrt{3}}{32\pi^2} \int_0^{s_1} ds s^k \sum_{i=1,2} \sqrt{\frac{s - 4M_i^2}{s}} A_i(s) B_i^*(s) \theta(s - 4M_i^2), \quad (4.45)$$

$$\mathcal{M}_{BB}^{(k)} = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^{s_1} ds s^k \sum_{i=1,2} \sqrt{\frac{s - 4M_i^2}{s}} B_i(s) B_i^*(s) \theta(s - 4M_i^2). \quad (4.46)$$

Notons que nous résolvons les équations d'Omnès-Muskhelishvili pour obtenir les facteurs de forme scalaires du pion et du kaon dans la limite $m \rightarrow 0$ (et m_s laissée à sa valeur physique). Mais nous considérons les modèles de matrice T ajustés sur les données expérimentales, avec des masses de quarks fixées à leur valeur physique. La limite $m \rightarrow 0$ ramènerait le seuil $s = 4M_\pi^2$ à 0¹, modifierait le déphasage $\pi\pi$ à basse énergie et déplacerait légèrement le seuil pour $K\bar{K}$. De telles modifications ne devraient pas avoir d'influence marquante sur l'allure générale de la fonction spectrale. En particulier, l'intégrale de la fonction spectrale, dominée par le pic du $f_0(980)$, devrait n'être affectée que très marginalement si on considère $T_{m \neq 0}$ au lieu de $T_{m \rightarrow 0}$.

4.4 Autres intégrales

4.4.1 Seconde règle de somme : $s_1 \leq s \leq s_0$

La contribution de l'intégrale en-dessous de s_1 est positive et dominée par le pic de $f_0(980)$. D'autre part, d'après la Section 4.2, Π est superconvergente et l'intégrale de la fonction spectrale de 0 à l'infini est nulle. $\operatorname{Im} \Pi(s)$ doit donc être négative quelque part. Supposons que c'est le cas pour $s_1 \leq s \leq s_0$.²

1. Remarquons que pour $m \rightarrow 0$, la discontinuité de Π le long de l'axe réel débute en $s = 0$. L'intégrale $\int_0^{s_0} ds (1 - s/s_0) \cdot \operatorname{Im} \Pi(s)/s$ est toutefois convergente en 0, car on a pour $s \rightarrow 0$:

$$F_1(s) \rightarrow F_1(0), \quad G_1(s) \sim G_1'(0) \cdot s, \quad \operatorname{Im} \Pi(s) \sim \frac{3}{32\pi} \frac{mm_s}{M_\pi^2 M_K^2} F_1(0) G_1'(0) s. \quad (4.47)$$

2. Si la fonction spectrale est partiellement positive dans cet intervalle, cette hypothèse aboutira à une estimation de la seconde intégrale qui sera plus petite que sa valeur réelle. Dans ce cas, nous sous-estimerons $X(2) - X(3)$.

Nous pouvons donc estimer la contribution de la région intermédiaire dans (4.3) par:

$$\frac{1}{s_0} \mathcal{J}' \leq -\frac{1}{\pi} \int_{s_1}^{s_0} ds \operatorname{Im} \Pi(s) \frac{1}{s} \left(1 - \frac{s}{s_0}\right) \leq \frac{1}{s_1} \mathcal{J}', \quad (4.48)$$

où \mathcal{J}' est l'intégrale:

$$\mathcal{J}' = \frac{1}{\pi} \int_{s_1}^{s_0} ds \operatorname{Im} \Pi(s) \left(1 - \frac{s}{s_0}\right), \quad (4.49)$$

qui satisfait la règle de somme:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{s_1} ds \operatorname{Im} \Pi(s) \left(1 - \frac{s}{s_0}\right) + \mathcal{J}' + \frac{1}{2i\pi} \int_{|s|=s_0} ds \Pi(s) \left(1 - \frac{s}{s_0}\right) = 0 \quad (4.50)$$

La première intégrale de (4.50) se calcule grâce à la fonction spectrale obtenue dans la section précédente:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{s_1} ds \operatorname{Im} \Pi(s) \left(1 - \frac{s}{s_0}\right) = \gamma_\pi \lambda_K \mathcal{I}'_{AB} + \gamma_K \lambda_K \frac{M_K^2}{M_\pi^2} \mathcal{I}'_{BB}, \quad (4.51)$$

avec:

$$\mathcal{I}'_{XY} = \mathcal{M}_{XY}^{(0)} - \frac{1}{s_0} \mathcal{M}_{XY}^{(1)}. \quad (4.52)$$

La contribution du grand cercle [troisième intégrale de (4.50)] s'obtient grâce à OPE selon la méthode décrite dans la Sec. 4.4.2 suivante:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|s|=s_0} ds \Pi(s) \left(1 - \frac{s}{s_0}\right) \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} &= 9[1 - 2\zeta(3)] \frac{F_\pi^2}{M_K^2} X(2) m_s^2(s_0) a^2(s_0) \\ &\quad \times \left\{ 1 + \frac{\beta_0 \gamma}{2} a(s_0) + \left[\frac{\beta_1 \gamma}{2} - \frac{\gamma(\gamma+1)}{8} \left(\frac{\pi^2}{3} - 2 \right) \beta_0^2 \right] a^2(s_0) \right\} + \dots \\ &= 9[1 - 2\zeta(3)] \frac{F_\pi^2}{M_K^2} X(2) m_s^2(s_0) a^2(s_0) \\ &\quad \times [1 + 6.5 \cdot a(s_0) - 25.125 \cdot a^2(s_0)]. \end{aligned} \quad (4.54)$$

4.4.2 Exp. en produit d'opérateurs: $|s| = s_0$

On cherche la contribution de l'intégrale sur le grand cercle:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|s|=s_0} ds \Pi(s) \frac{1}{s} \left(1 - \frac{s}{s_0}\right) \quad (4.55)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta (1 + e^{i\theta}) \Pi(p^2 = -s_0 e^{i\theta}). \quad (4.56)$$

Le facteur $(1 - s/s_0)$ supprime la contribution provenant de la région autour de s_0 (de genre temps). On peut donc appliquer l'expansion en produit d'opérateurs à Π [84]. Si on applique le *Renormalization Group Improvement* à (4.10), on voit apparaître devant le produit invariant par le groupe de renormalisation de QCD $m\langle\bar{u}u\rangle$:

$$a^2(P^2)m_s^2(P^2) = a^2(s_0)m_s^2(s_0) \times \left[\frac{a(P^2)}{a(s_0)} \right]^{8/b_0+2}, \quad (4.57)$$

avec $a(s) = \alpha_s(s)/\pi$ et $b_0 = 11 - 2N_f/3 = 9$. L'intégrale (4.56) devient:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & \frac{9[1 - 2\zeta(3)]}{2\pi} \frac{F_\pi^2}{M_K^2} X(2) \frac{m_s^2(s_0)}{s_0} [a(s_0)]^{-8/b_0} \\ & \times \int_{-\pi}^{\pi} ds (1 + e^{-i\theta}) [a(s_0 e^{i\theta})]^\gamma, \end{aligned} \quad (4.58)$$

avec $\gamma = 2 + 8/b_0 = 2 + 8/9$. Pour évaluer cette intégrale, nous voulons faire l'expansion de $a(P^2 = s_0 e^{i\theta})$ en puissances de $a(s_0)$. Le comportement de $a(t)$ (avec t complexe) est gouverné par la fonction β :

$$t \frac{d}{dt} a(t) = \frac{1}{2\pi} \beta[a(t)], \quad \frac{1}{\pi} \beta[a(t)] = -\beta_0 a^2 - \beta_1 a^3 + \dots, \quad (4.59)$$

$$\beta_0 = \frac{33 - 2N_f}{6} = \frac{9}{2}, \quad \beta_1 = \frac{306 - 38N_f}{24} = 8. \quad (4.60)$$

L'expansion de $a(s_0 e^{i\theta})$ aboutit donc à:

$$a(s_0 e^{i\theta}) = a(s_0) - \frac{i}{2} \beta_0 \theta a^2(s_0) + \left[\frac{i}{2} \beta_1 \theta - \frac{1}{4} \theta \beta_0^2 \theta^2 \right] a^3(s_0) + O(a^4). \quad (4.61)$$

On obtient:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & 9[1 - 2\zeta(3)] \frac{F_\pi^2}{M_K^2} X(2) \frac{m_s^2(s_0)}{s_0} a^2(s_0) \\ & \times \left\{ 1 - \frac{\beta_0 \gamma}{2} a(s_0) - \left[\frac{\beta_1 \gamma}{2} + \frac{\gamma(\gamma+1)}{8} \left(\frac{\pi^2}{3} - 2 \right) \beta_0^2 \right] a^2(s_0) \right\} + \dots \\ = & 9[1 - 2\zeta(3)] \frac{F_\pi^2}{M_K^2} X(2) \frac{m_s^2(s_0)}{s_0} a^2(s_0) [1 - 6.5 \cdot a(s_0) + 48.236 \cdot a^2(s_0)]. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Cette contribution est négative, mais elle est sévèrement supprimée par α_s^2 et m_s^2/s_0 . Nous avons considéré ici $m_s \sim 200$ MeV, mais la contribution de cette intégrale est très petite, de sorte que l'erreur induite par m_s et α_s est négligeable. Notons que la dualité n'est pas censée s'appliquer à des énergies aussi basses dans le secteur 0^{++} que dans les autres secteurs, du fait d'une contribution probablement importante des instantons directs dans ce secteur [85].

4.5 Résultats

4.5.1 Dérivées logarithmiques des masses

Les dérivées logarithmiques des masses s'obtiennent à partir des équations concernant F_P^2 et $F_P^2 M_P^2$:

$$\lambda_P = \frac{m_s}{M_P^2} \left(\frac{\partial M_P^2}{\partial m_s} \right)_{m=0} = \frac{m_s}{M_P^2} \frac{\partial \bar{M}_P^2}{\partial m_s}, \quad \gamma_P = \frac{m}{M_P^2} \left(\frac{\partial M_P^2}{\partial m} \right)_{m=0}. \quad (4.63)$$

Les expressions correspondantes sont indiquées en Sec. C.3. Notons que $\lambda_\pi = 0$ car proportionnelle à la dérivée de M_π^2 par rapport à m_s dans la limite $m \rightarrow 0$.

Dans le cadre standard, on aurait:

$$\gamma_\pi \sim 1, \quad \gamma_K \sim \frac{M_\pi^2}{2M_K^2} = 0.04, \quad \gamma_\eta \sim \frac{M_\pi^2}{3M_\eta^2} = 0.02, \quad (4.64)$$

$$\lambda_K \sim 1 - \frac{M_\pi^2}{2M_K^2} = 0.96, \quad \lambda_\eta \sim \frac{4M_K^2}{3M_\eta^2} = 1.09. \quad (4.65)$$

Les dérivées logarithmiques s'écartent de ces valeurs sous l'influence des termes quadratiques en masse de quarks dans les expansions de $F_P^2 M_P^2$. On a indiqué dans les Tables 4.1-4.3 les valeurs de ces dérivées pour $r = 10, 15, 20, 25, 30$, et $F_0 = 75$ MeV et 85 MeV. On remarquera que les valeurs pour $F_0 = 85$ MeV, $r = 25$, $X(3) \sim 0.8$ sont en accord raisonnable avec les estimations "standard" (4.64)-(4.65).

La règle de somme fait intervenir d'autres dérivées logarithmiques dans (4.3):

$$\bar{\lambda}_P = \frac{m_s}{\bar{M}_P^2} \frac{\partial \bar{M}_P^2}{\partial m_s} = \frac{M_P^2}{\bar{M}_P^2} \lambda_P, \quad P = K, \eta \quad (4.66)$$

λ_P et $\bar{\lambda}_P$ sont donc liés, mais le premier est supprimé par rapport au second par un facteur \bar{M}_P^2/M_P^2 . Dans la limite d'un condensat à 3 saveurs nul, l'expansion de $\bar{F}_P^2 \bar{M}_P^2$ commence par des termes quadratiques en m_s , de sorte que $\bar{\lambda}_P$ devrait être d'ordre 2. En revanche, $\lambda_P = \bar{\lambda}_P \cdot \bar{M}_P^2/M_P^2$ atteint des valeurs plus faibles (d'ordre 1.4-1.5).

Remarquons enfin que les valeurs indiquées ont été obtenues en négligeant les restes d'ordre supérieur ϵ_P et δ_P . Il est difficile d'estimer l'ampleur des incertitudes induites par ces restes NNLO sur les dérivées logarithmiques γ_P et λ_P . Imposons par exemple que ϵ_P/F_P^2 et δ_P/M_P^2 soient inférieurs à 10 %. Pour connaître l'effet de ces incertitudes sur γ_P et λ_P , il faudrait calculer la valeur des dérivées de ϵ_P et δ_P par rapport à m et m_s . Si nous

	$r = 10$				
$X(3)$	γ_π	γ_K	γ_η	λ_K	λ_η
0.	0.404315	0.125606	0.124124	1.28549	1.24827
0.1	0.427409	0.123948	0.122118	1.28679	1.24712
0.2	0.448875	0.12197	0.119636	1.28581	1.24372
0.3	0.468597	0.119664	0.116693	1.28245	1.23798

	$r = 15$				
$X(3)$	γ_π	γ_K	γ_η	λ_K	λ_η
0.	0.771578	0.0961103	0.0899689	1.32181	1.28813
0.1	0.791771	0.0941983	0.0877369	1.32132	1.28609
0.2	0.810459	0.0917764	0.0848007	1.31549	1.27814
0.3	0.827489	0.0888351	0.0811912	1.30402	1.26408
0.4	0.842692	0.0853772	0.0769527	1.28672	1.24387
0.5	0.855888	0.0814192	0.0721428	1.26352	1.21758
0.6	0.866893	0.0769907	0.066831	1.23451	1.18547
0.7	0.875518	0.0721338	0.0610968	1.19988	1.14794

	$r = 20$		$r = 25$		$r = 30$	
$X(3)$	λ_K	λ_η	λ_K	λ_η	λ_K	λ_η
0.	1.34143	1.30974	1.35369	1.32326	1.36207	1.33251
0.1	1.33831	1.30569	1.34721	1.31627	1.35154	1.32169
0.2	1.32542	1.29039	1.32515	1.29101	1.31825	1.28395
0.3	1.30221	1.26359	1.28675	1.24741	1.26145	1.21994
0.4	1.2685	1.22552	1.23229	1.18667	1.18268	1.13296
0.5	1.22459	1.17692	1.16314	1.11123	1.08563	1.02862
0.6	1.17118	1.11904	1.08165	1.02453	0.975484	0.91392
0.7	1.10939	1.05355	0.990858	0.93062	0.858074	0.796013
0.8	1.04065	0.982396	0.894104	0.833636	0.738905	0.681185

TAB. 4.1 – Dérivées logarithmiques en fonction de r et $X(3)$, pour $F_0=75$ MeV. Les valeurs de γ_π , γ_K et γ_η pour $r = 20, 25, 30$ sont reportées sur la Table 4.3.

	$r = 10$				
$X(3)$	γ_π	γ_K	γ_η	λ_K	λ_η
0.	0.390028	0.142802	0.139282	1.36071	1.31764
0.1	0.411541	0.140863	0.137021	1.35839	1.31327
0.2	0.432223	0.138712	0.134453	1.35464	1.30752
0.3	0.452021	0.136347	0.131586	1.3494	1.30036
0.4	0.470879	0.133766	0.128431	1.34265	1.29177

	$r = 15$				
$X(3)$	γ_π	γ_K	γ_η	λ_K	λ_η
0.	0.753094	0.108864	0.101421	1.41079	1.36968
0.1	0.771148	0.106692	0.0989794	1.40528	1.3629
0.2	0.788428	0.104175	0.0960674	1.39632	1.35237
0.3	0.804859	0.10131	0.0927041	1.38381	1.33803
0.4	0.82036	0.0980981	0.0889138	1.36764	1.31984
0.5	0.834844	0.094547	0.0847262	1.3478	1.29783
0.6	0.84822	0.0906692	0.0801756	1.3243	1.27207
0.7	0.860392	0.0864817	0.0753006	1.29718	1.24271

	$r = 20$		$r = 25$		$r = 30$	
$X(3)$	λ_K	λ_η	λ_K	λ_η	λ_K	λ_η
0.	1.43801	1.39808	1.45508	1.41594	1.46678	1.42819
0.1	1.42869	1.3881	1.44144	1.40212	1.44834	1.40992
0.2	1.41302	1.3709	1.41764	1.37646	1.41501	1.37412
0.3	1.39077	1.34637	1.38332	1.33895	1.3664	1.32103
0.4	1.36185	1.31458	1.33854	1.29002	1.30298	1.25193
0.5	1.32632	1.27582	1.28374	1.23061	1.2261	1.16912
0.6	1.28441	1.23052	1.21979	1.1621	1.13789	1.07568
0.7	1.23652	1.17934	1.1479	1.08627	1.04104	0.975211
0.8	1.18318	1.12308	1.06958	1.00511	0.938503	0.871457
0.9	-	-	0.986462	0.920761	0.833248	0.76796

TAB. 4.2 – Dérivées logarithmiques en fonction de r et $X(3)$, pour $F_0=85$ MeV. Les valeurs de γ_π , γ_K et γ_η pour $r = 20, 25, 30$ sont reportées sur la Table 4.3.

$X(3)$	$r = 20$			$r = 25$			$r = 30$		
	γ_π	γ_K	γ_η	γ_π	γ_K	γ_η	γ_π	γ_K	γ_η
0.	0.891748	0.0799332	0.0717758	0.943728	0.0697372	0.0604825	0.969998	0.0627279	0.0527913
0.1	0.90967	0.077915	0.0694686	0.960024	0.0676723	0.0581562	0.985088	0.0606438	0.0504698
0.2	0.926168	0.0751842	0.0662114	0.974963	0.0646782	0.054618	0.998886	0.0573998	0.046659
0.3	0.941039	0.0717355	0.062065	0.988292	0.0607639	0.0499767	1.01108	0.0530336	0.0415394
0.4	0.954066	0.0675963	0.0571253	0.99974	0.0560057	0.044413	1.02134	0.0477028	0.0354166
0.5	0.965024	0.062827	0.0515205	1.00904	0.0505431	0.0381654	1.02936	0.0416637	0.0286797
0.6	0.973692	0.0575179	0.0454033	1.01594	0.0445629	0.031506	1.03486	0.0352266	0.0217409
0.7	0.979855	0.0517823	0.0389419	1.0202	0.0382763	0.0247117	1.03758	0.0287038	0.0149753
0.8	0.983311	0.045748	0.0323082	1.02161	0.0318953	0.0180361	1.0373	0.022366	0.00867684
0.	0.875574	0.0900356	0.0809232	0.929952	0.0780918	0.0680833	0.958148	0.069847	0.0592879
0.1	0.891286	0.0877636	0.0784235	0.944051	0.0757754	0.0655736	0.971076	0.0675138	0.0567903
0.2	0.906271	0.0850049	0.0752801	0.95747	0.0728229	0.0622372	0.98337	0.0643866	0.0532734
0.3	0.920428	0.0817586	0.0715283	0.97008	0.0692391	0.0581337	0.994869	0.0604818	0.0488314
0.4	0.933649	0.0780367	0.0672177	0.98174	0.0650566	0.0533525	1.0054	0.0558659	0.0436123
0.5	0.945816	0.073865	0.0624111	0.992304	0.0603349	0.0480094	1.01479	0.0506514	0.0378068
0.6	0.956813	0.0692815	0.0571828	1.00163	0.0551568	0.0422399	1.02287	0.0449858	0.0316324
0.7	0.96652	0.0643357	0.0516159	1.00958	0.0496232	0.0361912	1.02949	0.0390367	0.0253124
0.8	0.974822	0.0590863	0.0457995	1.01602	0.0438456	0.0300127	1.03451	0.0329748	0.0190569
0.9	-	-	-	1.02085	0.0379386	0.0238474	1.03781	0.0269596	0.0130471

TAB. 4.3 – γ_π , γ_K et γ_η en fonction de $X(3)$ et r ($= 20, 25, 30$), pour $F_0 = 75$ MeV (haut) et $F_0 = 85$ MeV (bas).

connaissions seulement la taille de ϵ_P/F_P^2 et δ_P/M_P^2 , nous ne pouvons pas obtenir la valeur de ces dérivées, et donc estimer les incertitudes sur les dérivées logarithmiques,

4.5.2 Estimation de $X(3)$

Nous pouvons donc estimer $X(2) - X(3)$ de deux manières différentes: la première est la relation entre $X(2)$ et $X(3)$ (3.63), tandis que la seconde combine la relation entre $X(2) - X(3)$ et $\Pi(0)$ (4.3) avec la règle de somme pour $\Pi(0)$ (4.4). Dans les deux cas, la différence $X(2) - X(3)$ peut être exprimée en fonction des observables et de $[F_0, r, X(3)]$. Cette surdétermination peut être vue comme une contrainte fixant $X(3)$ en fonction de r et F_0 , voir Figs. 4.6-4.11.

Cette analyse comporte 3 sources d'incertitudes. *i)* Il y a tout d'abord des restes d'ordre sous-sous-dominant [*next-to-next-to-leading* (NNL)] dans les expansions des masses et constantes de désintégration. Leur effet est facile à contrôler dans (3.63) ou (3.82), mais la situation se complique dans le cas de la règle de la somme (4.3) et dans celui des dérivées logarithmiques λ_P et γ_P . Dans le cadre de χ PT standard, les auteurs de Ref. [60] ont constaté que la dépendance en m_s de $\Sigma(2)$ n'était pas beaucoup affectée par des effets à deux boucles. De plus, ces effets étaient de même signe que les contributions à une boucle: s'ils étaient importants, ils tendraient à accentuer (et non à réduire) l'écart entre $X(2)$ et $X(3)$. Une conclusion analogue est tirée dans Ref. [66]. Les restes NNL sont ici supposés petits, et ne sont pas indiqués dans les résultats.

ii) L'évaluation de la règle de somme (4.4) s'appuie sur un encadrement de l'intégrale entre s_1 et s_0 . A un couple donné (F_0, r) , notre évaluation n'associera pas une valeur unique de $X(3)$, mais plutôt une intervalle de valeurs acceptables, qui dépend en outre des séparateurs $s_1 < s_0$. Sur les Figs. 4.6-4.11, on voit que la borne supérieure pour $X(3)$ reste stable pour $\sqrt{s_0} > 1.5$ GeV, tandis que la borne inférieure dépend fortement de s_0 . Quand s_0 augmente, la borne inférieure de (4.48) semble trop lâche pour être saturée. Une borne inférieure plus restrictive serait la bienvenue.

iii) La troisième source d'incertitude provient de la matrice T utilisée pour bâtir la fonction spectrale (4.41) pour $s < s_1$. Trois modèles différents de matrice T ont été utilisés [77, 79, 74]. L'élément essentiel est la forme du pic du $f_0(980)$. Ref. [74] mène à l'effet le moins prononcé. Les deux autres modèles [77, 79] engendrent un pic du $f_0(980)$ plus élevé, une valeur plus grande de $\Pi(0)$ et une valeur plus petite de $X(3)$.

L'intervalle de $X(3)$ se rétrécit fortement pour les grandes valeurs de r , au point de le voir réduit à une seule valeur pour Ref. [74]. Les incerti-

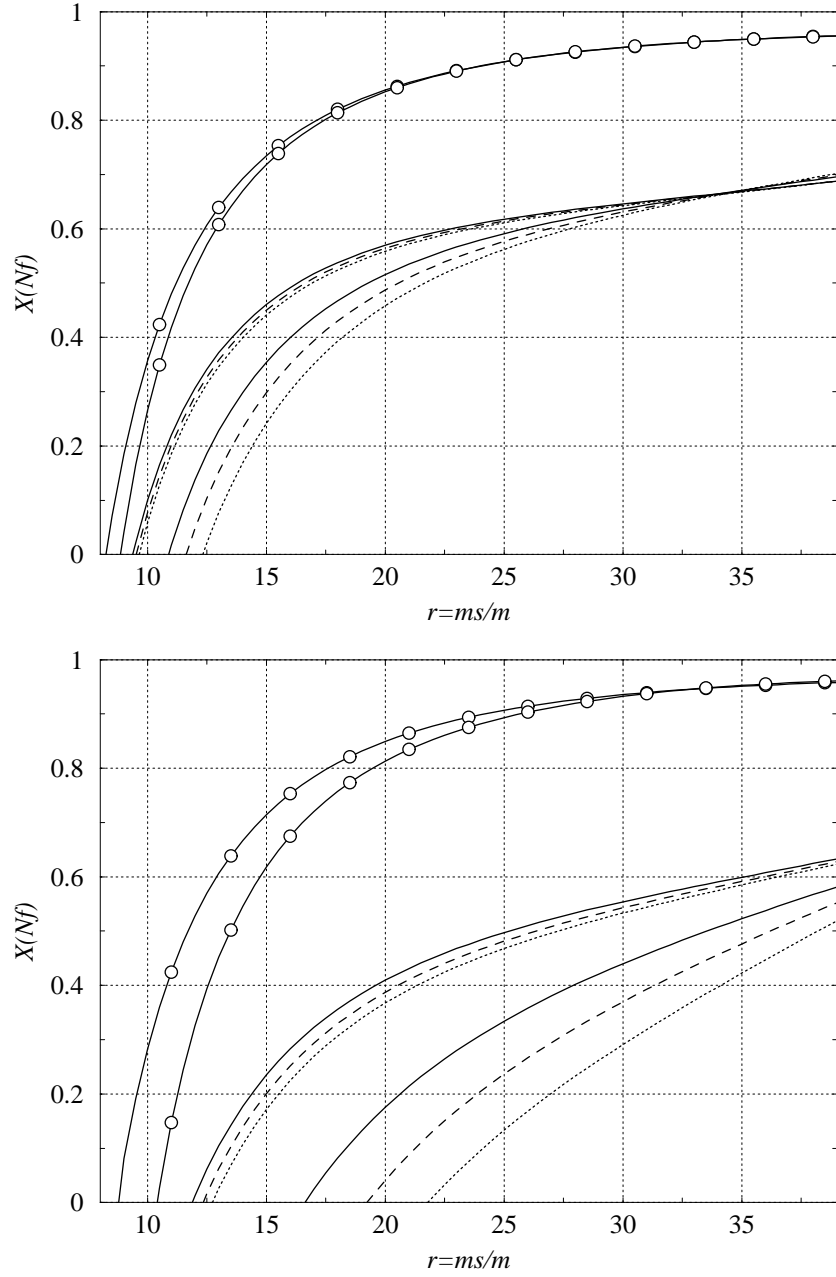


FIG. 4.6 – Règle de somme : Encadrement de $X(3)$ en fonction de $r = m_s/m$ pour $F_0 = 85$ MeV, avec les modèles de matrice T des Refs. [74] (haut) and [77] (bas) pour $s_1 = 1.2$ GeV et $s_0 = 1.5$ GeV (lignes pleines), 1.6 GeV (tirets) and 1.7 GeV (pointillés). Les lignes munies de cercles blancs délimitent l'encadrement correspondant pour $X(2)$.

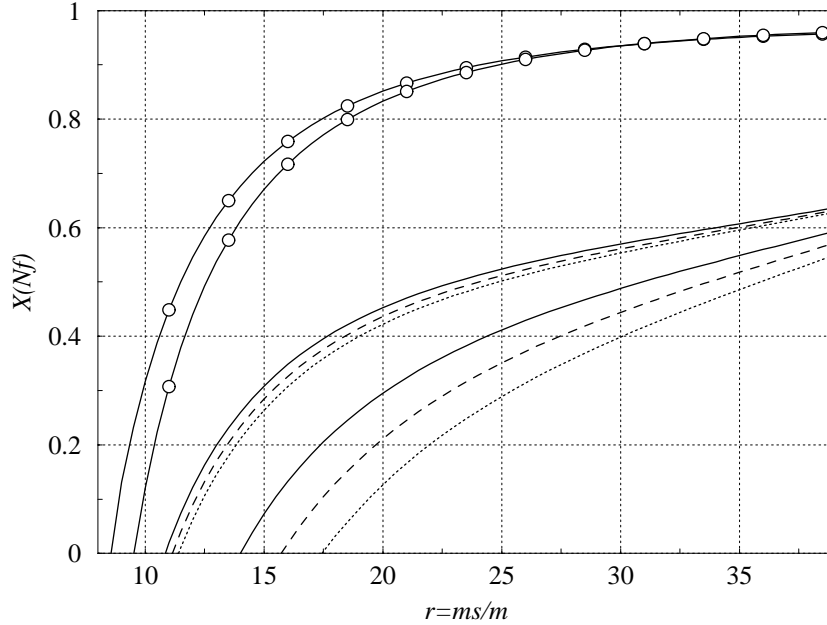


FIG. 4.7 – Règle de somme : Encadrement de $X(3)$ en fonction de $r = m_s/m$ pour $F_0=85$ MeV, avec le modèle de matrice T de Ref. [79] pour $s_1=1.2$ GeV et $s_0=1.5$ GeV (lignes pleines), 1.6 GeV (tirets) and 1.7 GeV (pointillés). Les lignes munies de cercles blancs délimitent l'encadrement correspondant pour $X(2)$.

tudes liées aux ordres supérieurs dans l'expansion des masses et constantes de désintégration sont susceptibles d'élargir cet intervalle. La comparaison des Figs. 4.6-4.7 avec les Figs. 4.8-4.9 montre que la valeur de F_0 n'a guère d'influence sur la contrainte obtenue sur $[X(3), r]$. De même, la comparaison des Figs. 4.6-4.7 avec les Figs. 4.10-4.11 montre qu'une variation de $\sqrt{s_1}$ autour de 1.2 GeV ne modifie pas beaucoup les résultats obtenus. Remarquons enfin que pour $r \sim 25$, on obtient $X(3)$ de l'ordre de la moitié de $X(2)$. On obtient donc un résultat similaire à celui des Refs. [65, 66], mais sans recourir à l'hypothèse $X(3) \sim 1$.

4.5.3 Constantes de basse énergie

Les résultats de la règle de somme pour $X(3)$ peuvent être convertis en résultats pour $L_{i=4..8}$ (en fonction de r et F_0). Les bornes correspondantes ont été tracées ici en fonction de r , pour $\sqrt{s_1} = 1.2$ GeV, $\sqrt{s_0} = 1.6$ GeV, et $F_0 = 85$ ou 75 MeV (voir Figs. 4.12-4.15). A seul titre de comparaison, nous

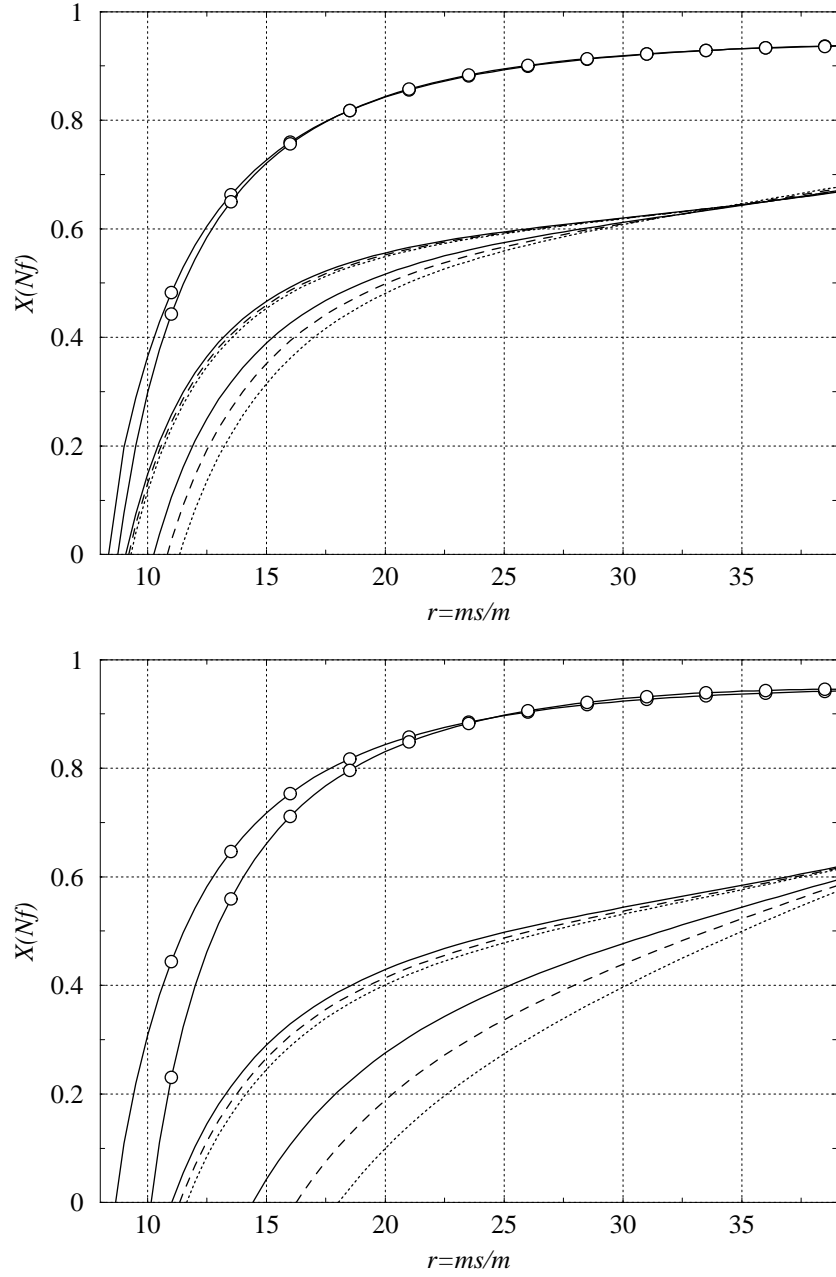


FIG. 4.8 – Règle de somme : Encadrement de $X(3)$ en fonction de $r = m_s/m$ pour $F_0 = 75$ MeV, avec les modèles de matrice T des Refs. [74] (haut) and [77] (bas) pour $s_1 = 1.2$ GeV et $s_0 = 1.5$ GeV (lignes pleines), 1.6 GeV (tirets) and 1.7 GeV (pointillés). Les lignes munies de cercles blancs délimitent l'encadrement correspondant pour $X(2)$.

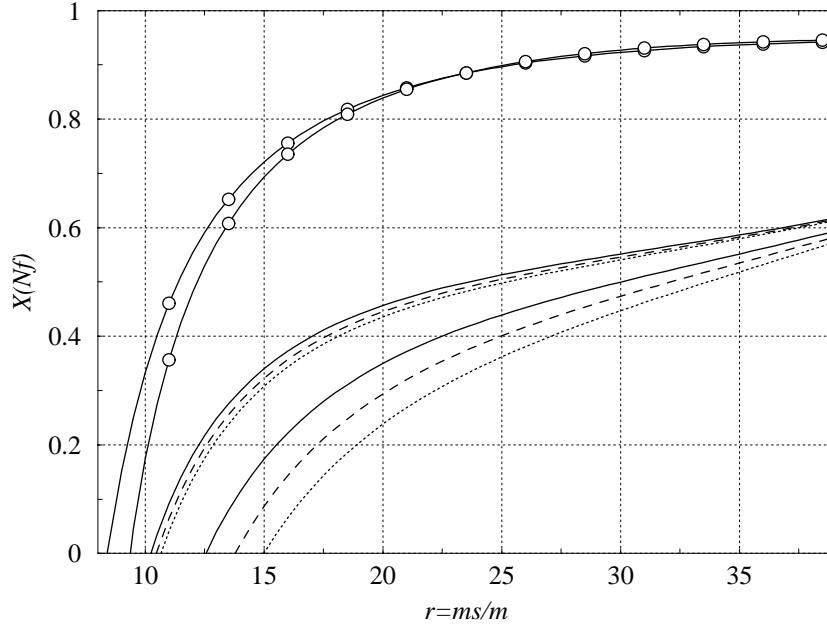


FIG. 4.9 – Règle de somme : Encadrement de $X(3)$ en fonction de $r = m_s/m$ pour $F_0 = 75$ MeV, avec le modèle de matrice T des Ref. [79] pour $s_1 = 1.2$ GeV et $s_0 = 1.5$ GeV (lignes pleines), 1.6 GeV (tirets) and 1.7 GeV (pointillés). Les lignes munies de cercles blancs délimitent l'encadrement correspondant pour $X(2)$.

avons indiqué sur ces figures les valeurs standard de Ref. [63] (Table 3.5). Remarquons que dans le cas des Refs. [60] et [63], L_4 et L_6 sont fixés à 0 à une échelle arbitraire (M_η ou du M_ρ). Dans notre analyse, les valeurs de L_4 et L_6 dépendent fortement de r et de F_0 . Il convient donc d'être très prudent si on veut comparer les valeurs obtenues à l'aide de la règle de somme et celles couramment utilisées dans le cadre standard. Les valeurs de Ref. [63] ne sont ici tracées qu'à fin de guider l'œil³.

Pour de petits r , les constantes de basse énergie atteignent de très grandes valeurs: leur définition inclut des facteurs $1/B_0$ qui les font diverger quand $X(3) \rightarrow 0$. On peut noter également les valeurs élevées de L_5 , L_7 et L_8 pour $r \sim 25$, parce que la règle de somme pousse $L_6(M_\rho)$ vers des valeurs

3. Notons en particulier que l'ajustement effectué dans Ref. [60] s'appuie fortement sur l'hypothèse $L_4(M_\rho) = L_6(M_\rho) = 0$. Si cet ajustement était effectué pour d'autres valeurs de $L_4(M_\rho)$ et $L_6(M_\rho)$ tout en restant dans compatibles avec l'hypothèse standard $X(3) \sim 1$, il pourrait mener à des valeurs sensiblement différentes des autres constantes de basse énergie.

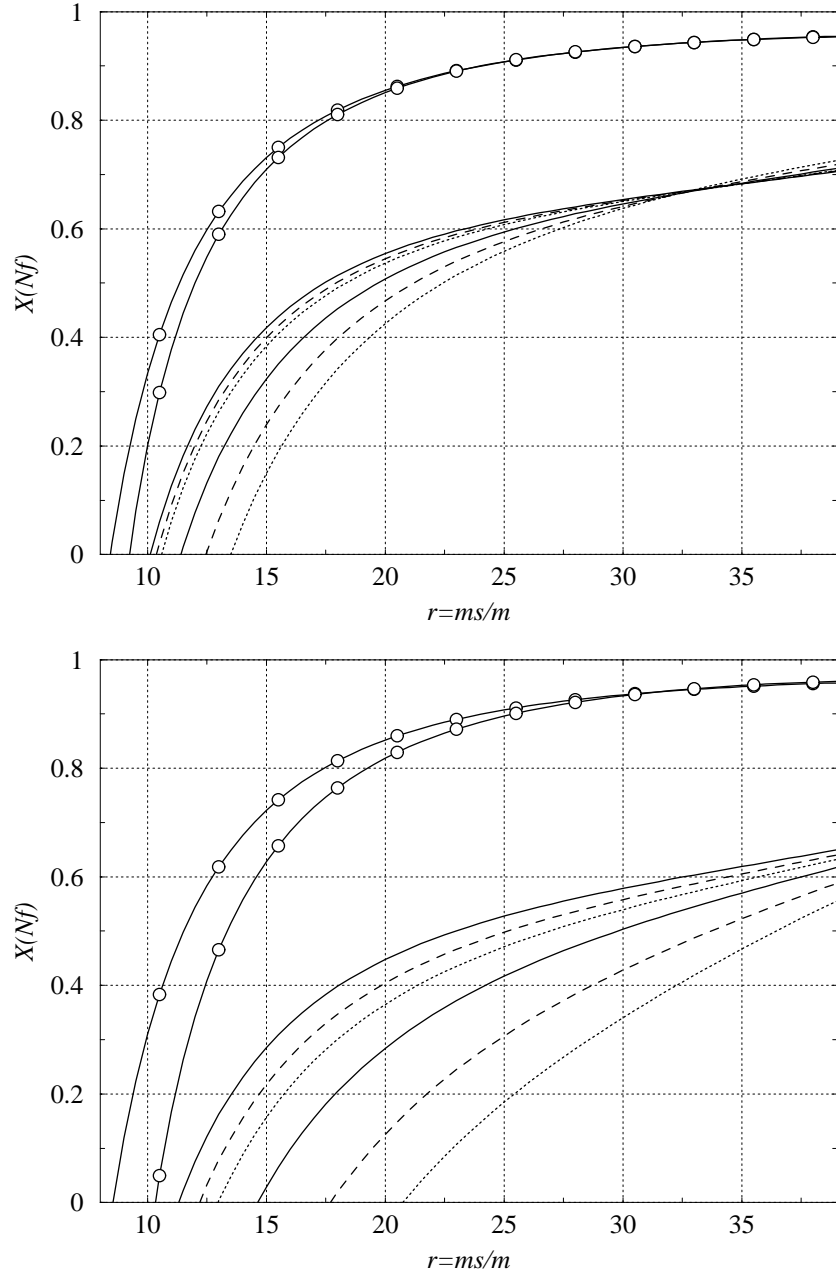


FIG. 4.10 – Règle de somme : Encadrement de $X(3)$ en fonction de $r = m_s/m$ pour $F_0 = 85$ MeV, avec les modèles de matrice T des Refs. [74] (haut) and [77] (bas) pour $s_1 = 1.3$ GeV et $s_0 = 1.5$ GeV (lignes pleines), 1.6 GeV (tirets) and 1.7 GeV (pointillés). Les lignes munies de cercles blancs délimitent l'encadrement correspondant pour $X(2)$.

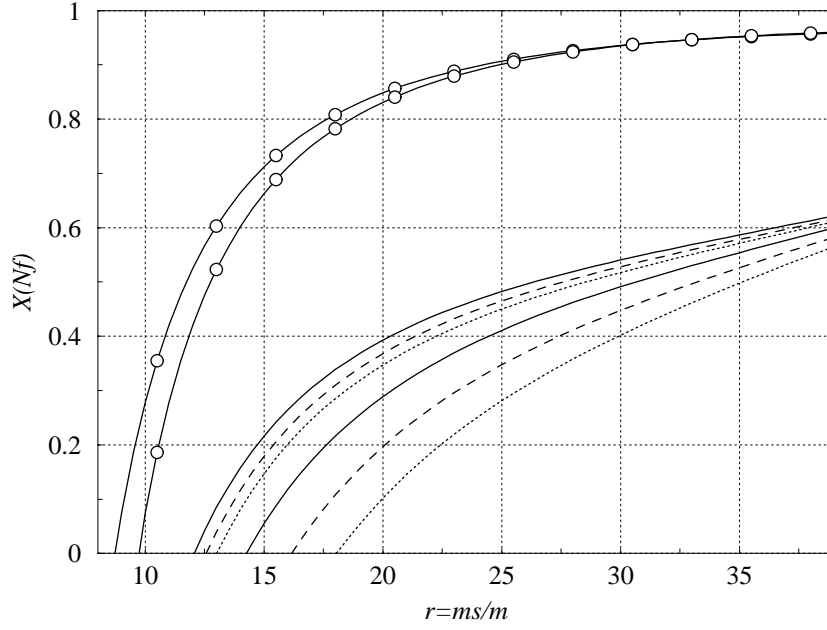


FIG. 4.11 – Règle de somme : Encadrement de $X(3)$ en fonction de $r = m_s/m$ pour $F_0=85$ MeV, avec le modèle de matrice T de Ref. [79] pour $s_1=1.3$ GeV et $s_0=1.5$ GeV (lignes pleines), 1.6 GeV (tirets) and 1.7 GeV (pointillés). Les lignes munies de cercles blancs délimitent l'encadrement correspondant pour $X(2)$.

légèrement positives. Notons que la valeur de L_4 n'est pas prédite par la règle de somme: elle est essentiellement dépendante de la valeur de F_0 , ainsi que le montre la comparaison des Figs. 4.12-4.13 avec les Figs. 4.14-4.15.

4.5.4 Détermination conjointe de $F(3)$ et $X(3)$

Une information supplémentaire sur la constante de désintégration peut être obtenue à partir des facteurs de forme scalaire, à l'aide d'un théorème à basse énergie. Considérons en effet le corrélateur:

$$D_{\mu\nu}^{ij}(p, q) = \lim_{m \rightarrow 0} \iint e^{i(p \cdot x - q \cdot y)} \langle 0 | T \{ A_\mu^i(x) A_\nu^j(0) \bar{s}s(y) | 0 \rangle^{(c)}, \quad (4.67)$$

où $i, j = 1 \dots 3$, et (c) désigne la composante connexe de $(A_\mu^i A_\nu^j)(\bar{s}s)$.

Les identités de Ward $p^\mu D_{\mu\nu}^{ij} = r^\nu D_{\mu\nu}^{ij} = 0$ (avec $r = q - p$) nous permettent d'écrire la décomposition:

$$D_{\mu\nu}^{ij} = m_s \delta_{ij} \{ K [r^2 p_\mu p_\nu - (p \cdot r) p_\mu r_\nu + p^2 r_\mu r_\nu - p^2 r^2 g_{\mu\nu}]$$

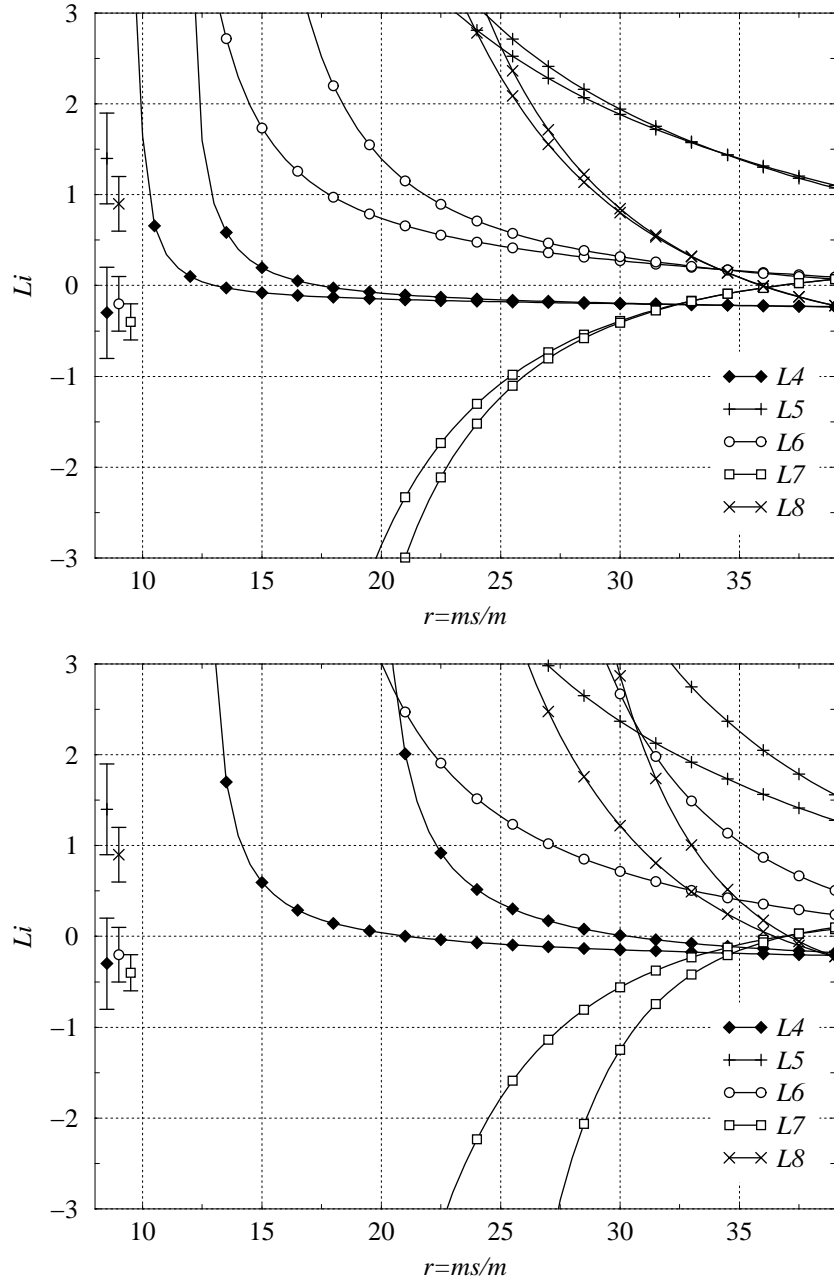


FIG. 4.12 – Règle de somme : Constantes de basse énergie $L_{i=4..8}(M_\rho) \cdot 10^3$ en fonction de $r = m_s/m$ pour $F_0=85$ MeV, $s_1=1.2$ GeV et $s_0=1.6$ GeV, avec les modèles de matrice T des Refs. [74] (haut) et [77] (bas). Les valeurs indiquées le long de l'axe des ordonnées sont les estimations standard provenant de Ref. [63].

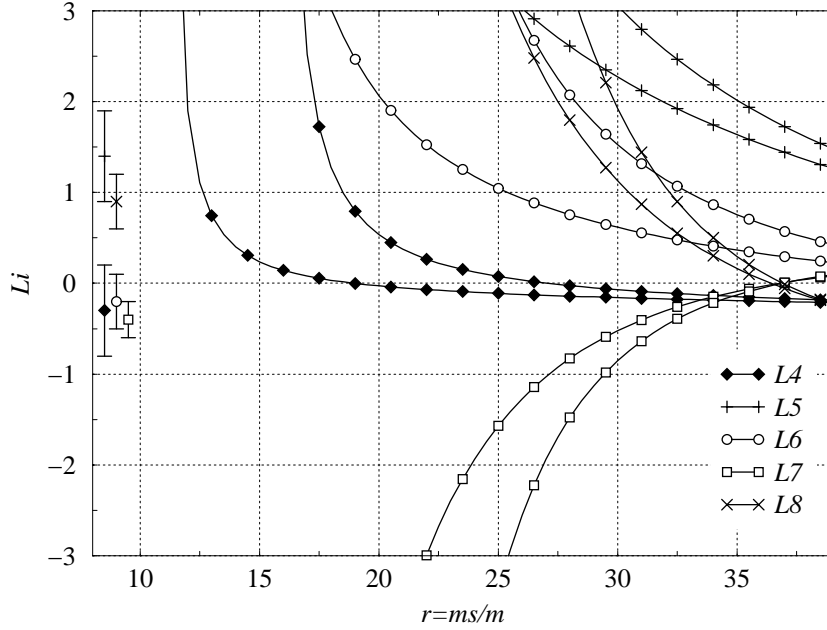


FIG. 4.13 – Règle de somme : Constantes de basse énergie $L_{i=4\dots 8}(M_\rho) \cdot 10^3$ en fonction de $r = m_s/m$ pour $F_0=85$ MeV, $s_1=1.2$ GeV et $s_0=1.6$ GeV, avec le modèle de matrice T de Ref. [79]. Les valeurs indiquées le long de l'axe des ordonnées sont les estimations standard provenant de Ref. [63].

$$+L[r_\mu p_\nu - (p \cdot r)g_{\mu\nu}]\}, \quad (4.68)$$

où K et L sont deux fonctions scalaires de p^2 , q^2 et r^2 .

On a d'une part:

$$D_{\mu\nu}^{ij}(p, 0) = \frac{\partial}{\partial m_s} \left[i \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle 0 | T \{ A_\mu^i(x) A_\nu^j(0) \} | 0 \rangle \right]. \quad (4.69)$$

Le corrélateur $A_\mu^i A_\nu^j$ admet la décomposition suivante:

$$i \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle 0 | T \{ A_\mu^i(x) A_\nu^j(0) | 0 \rangle = \delta^{ij} [p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}] \Phi(p^2). \quad (4.70)$$

$\Phi(p^2)$ contient un pôle en $p^2 = 0$ provenant des états à un pion:

$$\Phi(p^2) = -\frac{F^2(2)}{p^2} + \dots \quad (4.71)$$

où les points de suspension désignent les contributions des autres états. On a donc:

$$D_{\mu\nu}^{ij}(p, 0) = -\delta^{ij} [p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2] \left\{ \frac{1}{p^2} \frac{\partial F^2(2)}{\partial m_s} + \dots \right\} \quad (4.72)$$

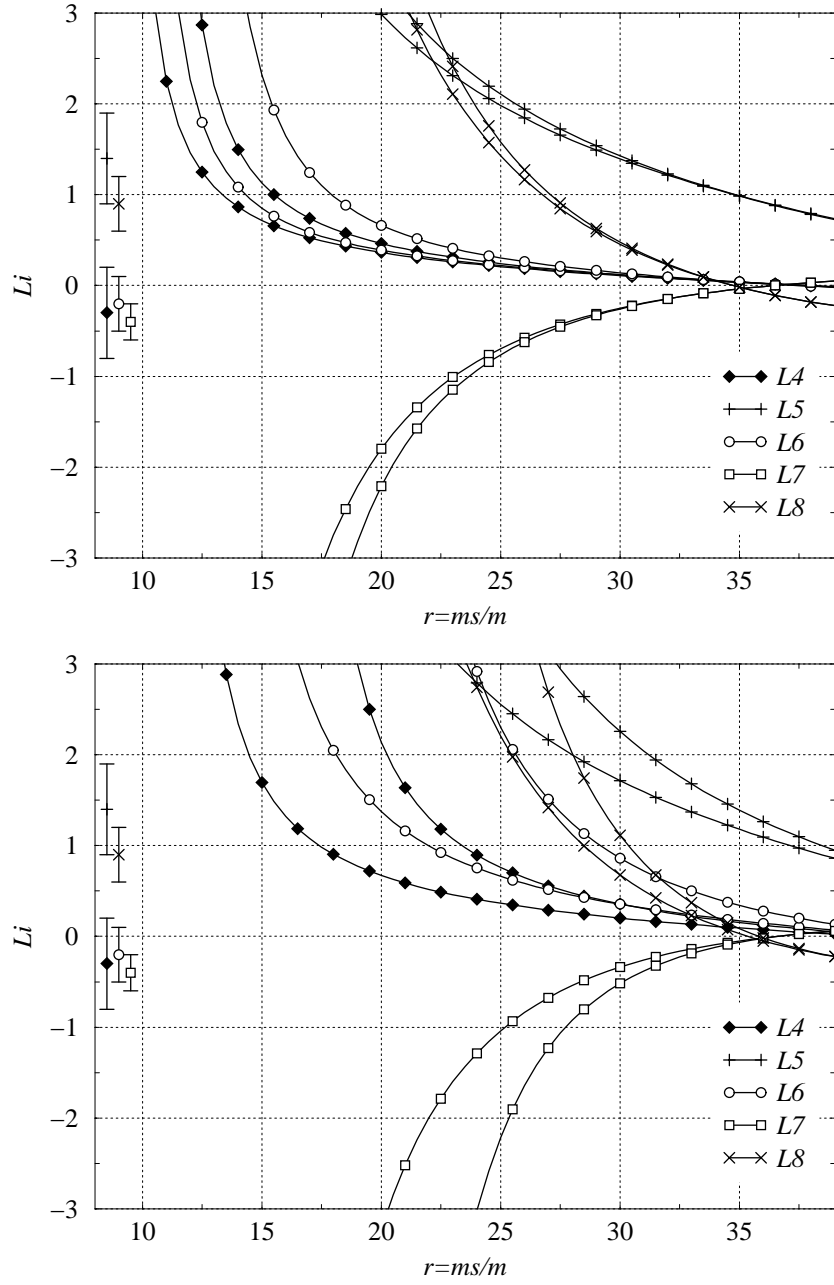


FIG. 4.14 – Règle de somme : Constantes de basse énergie $L_{i=4..8}(M_\rho) \cdot 10^3$ en fonction de $r = m_s/m$ pour $F_0=75$ MeV, $s_1=1.2$ GeV et $s_0=1.6$ GeV, avec les modèles de matrice T des Refs. [74] (haut) et [77] (bas). Les valeurs indiquées le long de l'axe des ordonnées sont les estimations standard provenant de Ref. [63].

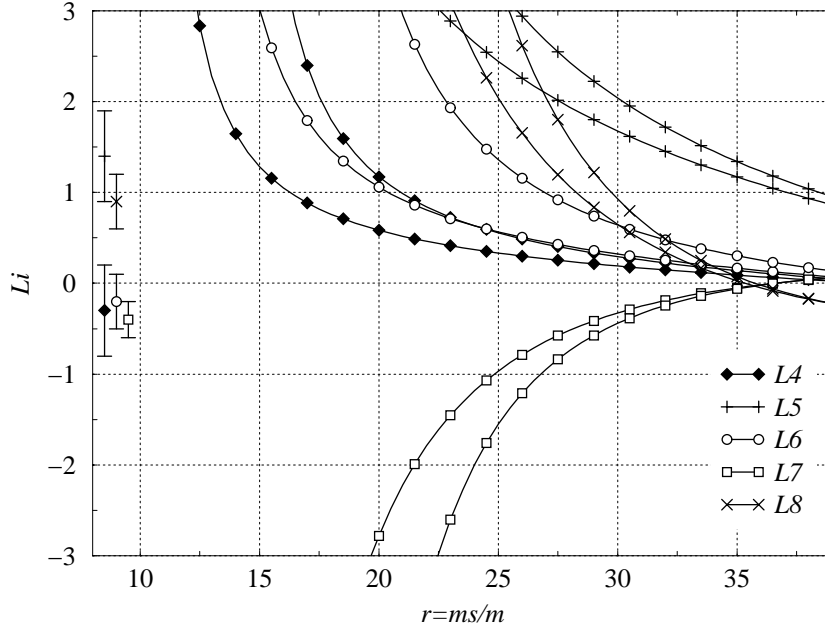


FIG. 4.15 – Règle de somme : Constantes de basse énergie $L_{i=4..8}(M_\rho) \cdot 10^3$ en fonction de $r = m_s/m$ pour $F_0=75$ MeV, $s_1=1.2$ GeV et $s_0=1.6$ GeV, avec le modèle de matrice T de Ref. [79]. Les valeurs indiquées le long de l'axe des ordonnées sont les estimations standard provenant de Ref. [63].

D'autre part, $T_{\mu\nu}^{ij}$ est dominée à basse énergie par l'échange de deux pions entre $\bar{s}s$ et chacun des courants axiaux :

$$D_{\mu\nu}^{ij} = \delta^{ij} F^2(2) G_1(q^2) \frac{p_\mu r_\nu}{p^2 r^2} + \dots \quad (4.73)$$

ce qui implique pour les fonctions scalaires :

$$K(p^2, q^2, r^2) = -F^2(2) \frac{G_1(q^2)}{p^2 r^2 (p \cdot r)} + \dots \quad L(p^2, q^2, r^2) = \dots \quad (4.74)$$

Le pôle de K est lié à au couplage d'un pion à chaque courant axial: $p^2 \sim r^2 \sim 0$ (et q^2 quelconque). Cela permet de réécrire le pôle de K :

$$K(p^2, q^2, r^2) = -2F^2(2) \frac{G_1(q^2)}{p^2 r^2 (q^2 - p^2 - r^2)} + \dots = -2F^2(2) \frac{G_1(q^2)}{p^2 q^2 r^2} + \dots \quad (4.75)$$

D'après (4.70) et (4.68) à $q = 0$, on a :

$$p^2 K(p^2, 0, p^2) + L(p^2, 0, p^2) = \Phi(p^2), \quad (4.76)$$

et la comparaison de (4.72) et (4.74) pour $p^2 \rightarrow 0$ aboutit à:

$$\frac{\partial F^2(2)}{\partial m_s} = 2F^2(2) \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{G_1(q^2)}{q^2} \quad \frac{m_s}{F(2)} \frac{\partial F(2)}{\partial m_s} = m_s G'_1(0). \quad (4.77)$$

Ce théorème de basse énergie [65, 66, 71] relie la dérivée logarithmique de $F(2)$ par rapport à m_s à la pente du facteur de forme scalaire étrange du pion (à impulsion nulle).

D'après (4.38), on a pour la pente du facteur de forme:

$$m_s G'_1(0) = m_s G_2(0) B'_1(0) = m_s \frac{\partial \bar{M}_K^2}{\partial m_s} B'_1(0) = \lambda_K M_K^2 B'_1(0). \quad (4.78)$$

$B'_1(0)$ s'obtient en prenant la dérivée en 0 de (4.16):

$$B'_1(0) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{4M_\pi^2}^{\infty} ds' \frac{1}{s'^2} T_{1j}^*(s') \sqrt{\frac{s' - 4M_j^2}{s'}} \theta(s' - 4M_j^2) B_j(s'). \quad (4.79)$$

La résolution numérique des équations d'Omnès-Muskhelishvili (4.16) nous a donné les valeurs de la solution $\vec{B}(s)$ aux points utilisés pour calculer l'intégrale par quadrature de Gauss-Legendre. L'intégrale (4.79) peut donc se calculer directement en utilisant la même méthode d'intégration.

On a d'autre part d'après (3.67):

$$\frac{m_s}{2F^2(2)} \frac{\partial F^2(2)}{\partial m_s} = \frac{1}{\bar{F}_\pi^2} \left[m_s \tilde{\xi} - \frac{rX(3)}{64\pi^2} \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{F_0^2} \left(\log \frac{\bar{M}_K^2}{M_K^2} + \frac{M_K^2}{\bar{M}_K^2} \lambda_K \right) \right]. \quad (4.80)$$

On voit donc que (4.77) est une nouvelle contrainte en plus de la règle de somme (4.4). L'analyse du spectre des mésons pseudoscalaires nous permet de tout exprimer en fonction de masses et de constantes de désintégration connues et de 3 paramètres $F_0, r, X(3)$. La règle de somme agissait comme une première contrainte qui fixait un intervalle de variation de $X(3)$ en fonction de r et $F_0 \equiv F(3)$. Si on exploite aussi la deuxième contrainte (4.77), nous pouvons obtenir des intervalles de variation pour $F(3)$ et $X(3)$ en fonction de r , indiqués respectivement sur les Figs. 4.16-4.17 et les Figs. 4.18-4.19. Rappelons que la Sec. 3.7.1 contient la Table 3.1 qui donne la valeur de $F(N_f)$ à partir de $[F(N_f)/F_\pi]^2$. On peut ici encore convertir ces résultats en valeurs des constantes à basse énergie (voir Figs. 4.20 et 4.21).

On constate que les valeurs de $X(3)$ sont proches de celles obtenues en utilisant uniquement la règle de somme (4.4). Lorsque nous avons exploité seulement cette règle de somme, nous avons déjà observé que les résultats obtenus pour $X(3)$ dépendaient peu de la valeur choisie pour F_0 . On voit

également que la pente du facteur de forme étrange du pion privilégie de basses valeurs de $F(3)$ (autour de 70 MeV) pour $r \sim 25$. On observe en accord avec ce résultat que $L_4(M_\rho)$ se situe dans les petites valeurs *positives*. Cette augmentation de $L_4(M_\rho)$ (par rapport à l'analyse précédente) s'accompagne d'une diminution de $L_5(M_\rho)$. Dans la Ref. [71], l'analyse de ce même facteur étrange du pion avait abouti à $d_F = m_s/F(2) \cdot \partial \log F(2)/\partial m_s = 0.09$. Dans le cadre de Standard χ PT, on obtient alors $L_4(M_\rho) \simeq 0.4 \cdot 10^{-3}$, soit $F(3)$ de l'ordre de 75 MeV. Cette question a également été discutée dans les Refs. [65, 66, 76].

Remarquons toutefois que ces deux contraintes n'exigent pas la même précision sur les facteurs de forme scalaires. Pour la règle de somme, il faut connaître l'intégrale de la fonction spectrale $\text{Im } \Pi$ jusqu'à 1.2 GeV. Cette dernière est dominée par le pic du $f_0(980)$: c'est donc la forme globale de la fonction spectrale (et plus particulièrement aux énergies intermédiaires) qui importe. Pour le théorème à basse énergie, on s'intéresse à la pente d'un des facteurs de forme en zéro. Il s'agit alors de détails fins des facteurs de forme à basse énergie. La contrainte imposée par le théorème à basse énergie risque donc d'être moins stable que celle due à la règle de somme. C'est pourquoi nous avons préféré analyser en détail la règle de somme seule avant d'exploiter conjointement les deux contraintes.

A partir des solutions des équations d'Omnès-Muskhelishvili, il est également possible de déterminer le rayon scalaire du pion $\langle r^2 \rangle_s^\pi$:

$$F_1(s) = F_1(0) \left[1 + \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_s^\pi s + c_\pi s^2 + \dots \right], \quad (4.81)$$

considérés en dehors de la limite chirale [avec les masses physiques m_s et $m = (m_u + m_d)/2$]. Si on décompose \vec{F} sur les deux solutions \vec{A} et \vec{B} des équations d'Omnès-Muskhelishvili, on obtient:

$$\langle r^2 \rangle_s^\pi = 6 \frac{F_1'(0)}{F_1(0)} = 6 \left[A_1'(0) + \frac{M_K^2}{M_\pi^2} \frac{\tilde{\gamma}_K}{\tilde{\gamma}_\pi} B_1'(0) \right], \quad (4.82)$$

avec les dérivées logarithmiques (hors de la limite chirale):

$$\tilde{\gamma}_P = \frac{\partial \log M_P^2}{\partial \log m}, \quad (4.83)$$

dont les expressions en terme des constantes de basse énergie sont données dans la Sec. C.4

Si l'on se limitait au seul canal $\pi\pi$, seul le premier terme (la solution \vec{A}) apparaîtrait dans la partie droite de (4.82) pour aboutir à un rayon scalaire

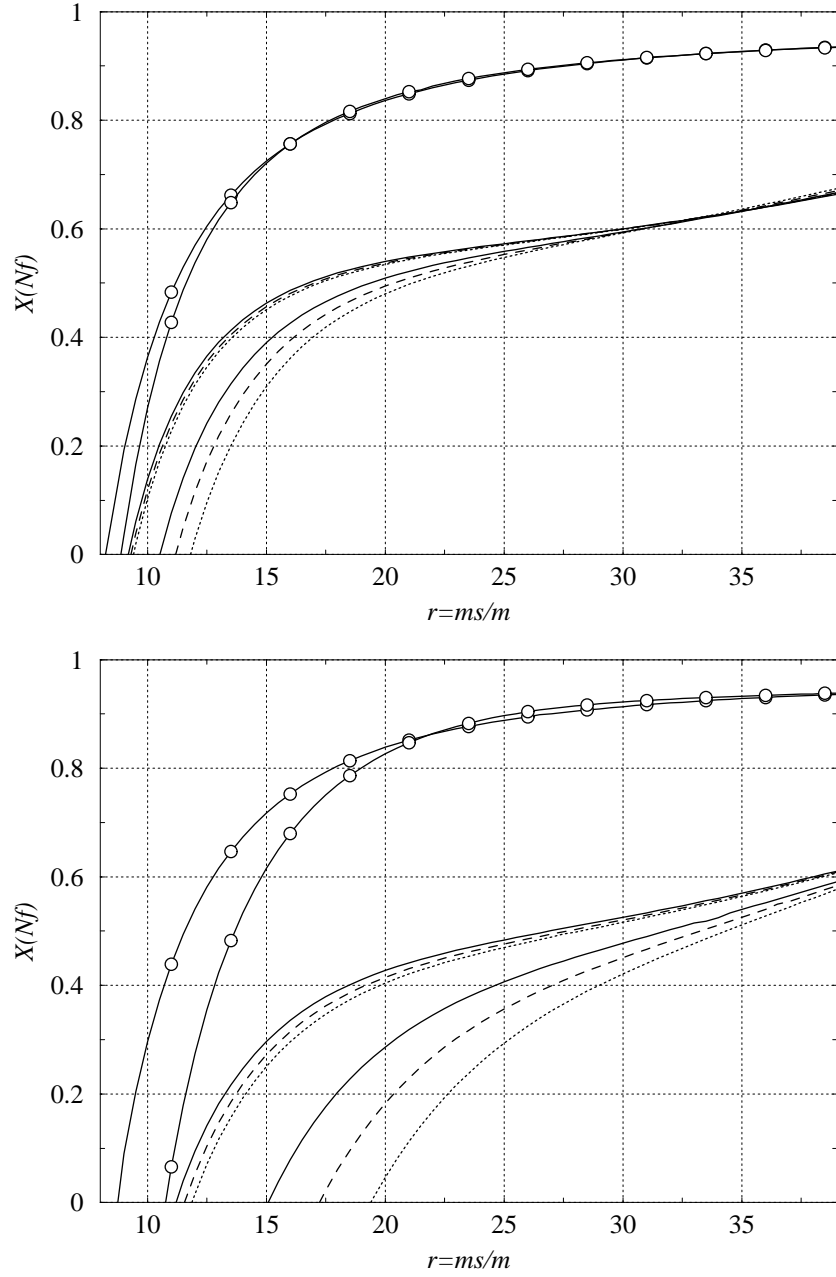


FIG. 4.16 – Règle de somme et pente du facteur de forme étrange du pion : Encadrement de $X(3)$ en fonction de $r = m_s/m$ avec les modèles de matrice T des Refs. [74] (haut) and [77] (bas) pour $s_1 = 1.3$ GeV et $s_0 = 1.5$ GeV (lignes pleines), 1.6 GeV (tirets) and 1.7 GeV (pointillés). Les lignes munies de cercles blancs délimitent l'encadrement correspondant pour $X(2)$.

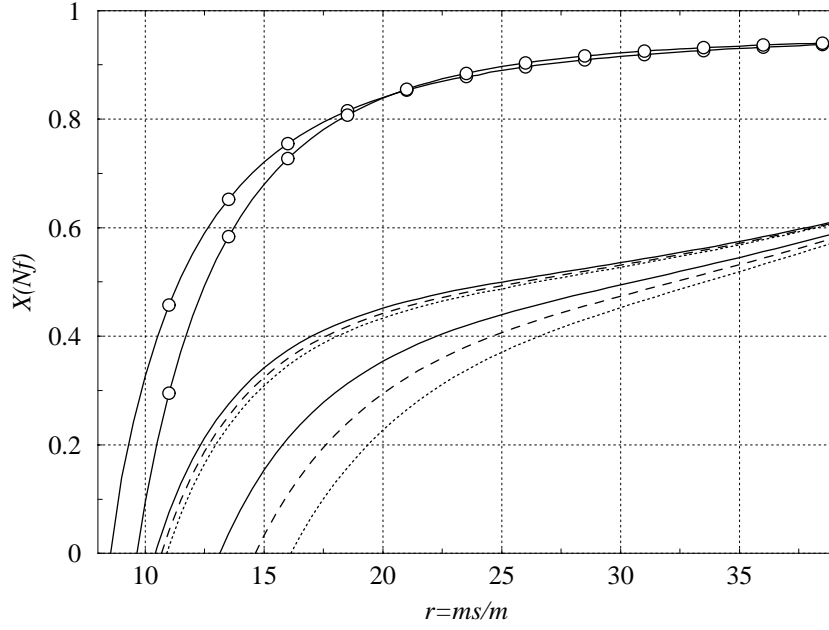


FIG. 4.17 – Règle de somme et pente du facteur de forme étrange du pion : Encadrement de $X(3)$ en fonction de $r = m_s/m$ avec le modèle de matrice T de Ref. [79] pour $s_1 = 1.2$ GeV et $s_0 = 1.5$ GeV (lignes pleines), 1.6 GeV (tirets) and 1.7 GeV (pointillés). Les lignes munies de cercles blancs délimitent l'encadrement correspondant pour $X(2)$.

du pion indépendant de r , $X(3)$ et F_0 . Puisque nous nous intéressons à une quantité décrivant le facteur de forme non-étrange du pion à basse énergie, le canal $K\bar{K}$ devrait pouvoir être négligé sans affecter fortement les résultats. Cette intuition est confirmée numériquement:

$$\frac{B'_1(0)}{A'_1(0)} \sim 0.1 \quad \frac{M_K^2 \tilde{\gamma}_K}{M_\pi^2 \tilde{\gamma}_\pi} \sim \frac{1}{2}. \quad (4.84)$$

Le deuxième terme dans la partie droite de (4.82), lié au canal $K\bar{K}$ donne lieu à une faible dépendance sur r , $X(3)$, F_0 . On peut reprendre les résultats précédents, donnant $X(3)$ et F_0 en fonction de r , et regarder les variations correspondantes pour le rayon scalaire du pion:

0.537 à 0.588 fm ²	Oller-Oset-Pelaez	Ref. [74],
0.567 à 0.630 fm ²	Au-Morgan Pennington	Ref. [77],
0.592 à 0.650 fm ²	Kaminski-Lesniak-Maillet	Ref. [79],

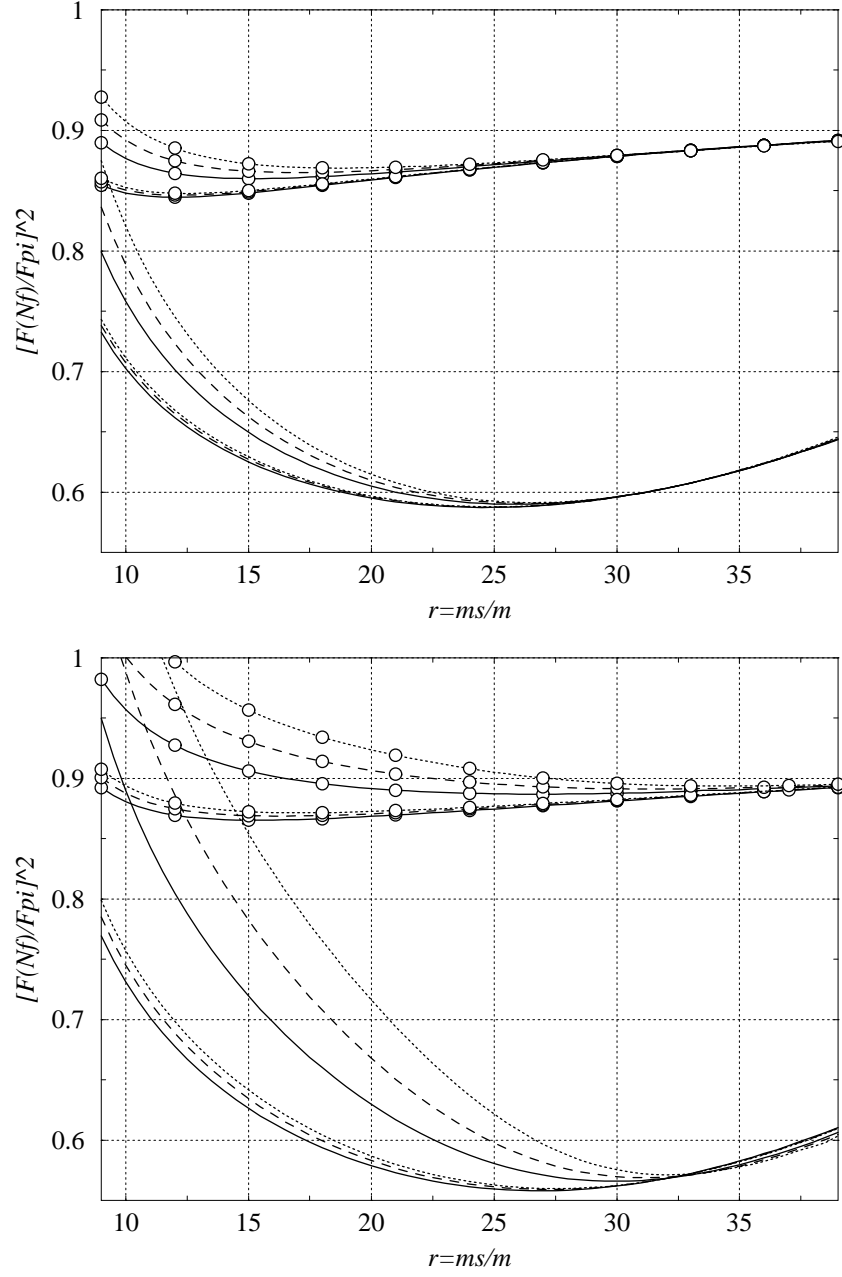


FIG. 4.18 – Règle de somme et pente du facteur de forme étrange du pion : Encadrement de $[F(3)/F_{\pi}]^2$ (lignes sans symboles) et $[F(2)/F_{\pi}]^2$ (cercles blancs) en fonction de $r = m_s/m$ avec les modèles de matrice T des Refs. [74] (haut) and [77] (bas) pour $s_1 = 1.2$ GeV et $s_0 = 1.5$ GeV (lignes pleines), 1.6 GeV (tirets) and 1.7 GeV (pointillés).

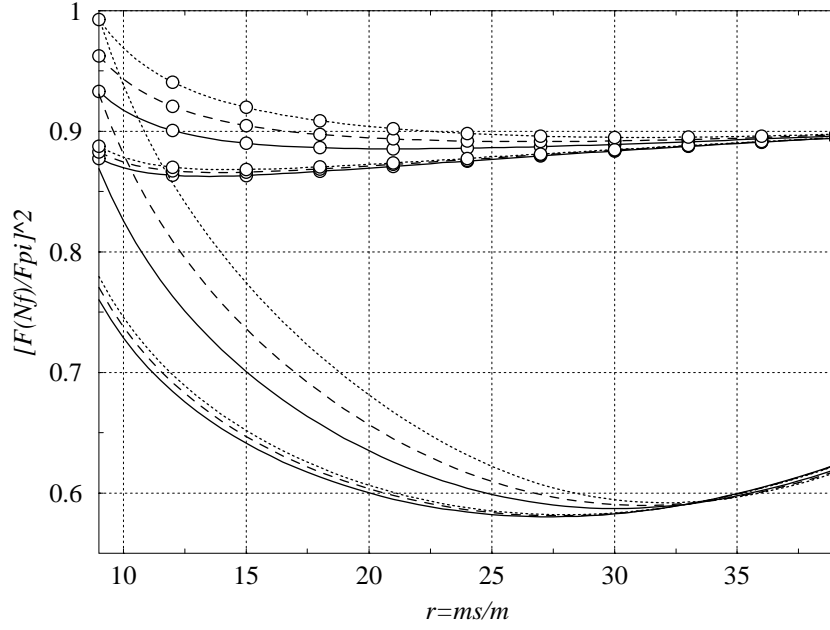


FIG. 4.19 – Règle de somme et pente du facteur de forme étrange du pion : Encadrement de $[F(3)/F_\pi]^2$ (lignes sans symboles) et $[F(2)/F_\pi]^2$ (cercles blancs) en fonction de $r = m_s/m$ avec le modèle de matrice T de Ref. [79] pour $s_1 = 1.2$ GeV et $s_0 = 1.5$ GeV (lignes pleines), 1.6 GeV (tirets) and 1.7 GeV (pointillés).

que l'on peut comparer aux estimations: $0.6 \pm 0.2 \text{ fm}^2$ [86], $0.55 \pm 0.15 \text{ fm}^2$ [6], 0.55 à 0.61 fm^2 [87] et $0.61 \pm 0.04 \text{ fm}^2$ [88]. En particulier, l'exploitation des équations de Roy en χ PT Standard [88] s'appuie fortement sur la valeur du rayon scalaire du pion.

La connaissance du rayon scalaire du pion pourrait être envisagée comme une contrainte supplémentaire sur notre système, car $\langle r^2 \rangle_s^\pi$ est lié à $2L_4 + L_5$. Comme dans le cas de d_F , une telle contrainte semble toutefois fragile, et susceptible d'être affectée par des corrections d'ordre supérieur. Nous sommes de plus obligés de la considérer en dehors de la limite chirale $m \rightarrow 0$. Il semble donc plus sage de réserver la contrainte liée au rayon scalaire du pion à une analyse où les termes NNLO seraient traités moins schématiquement.

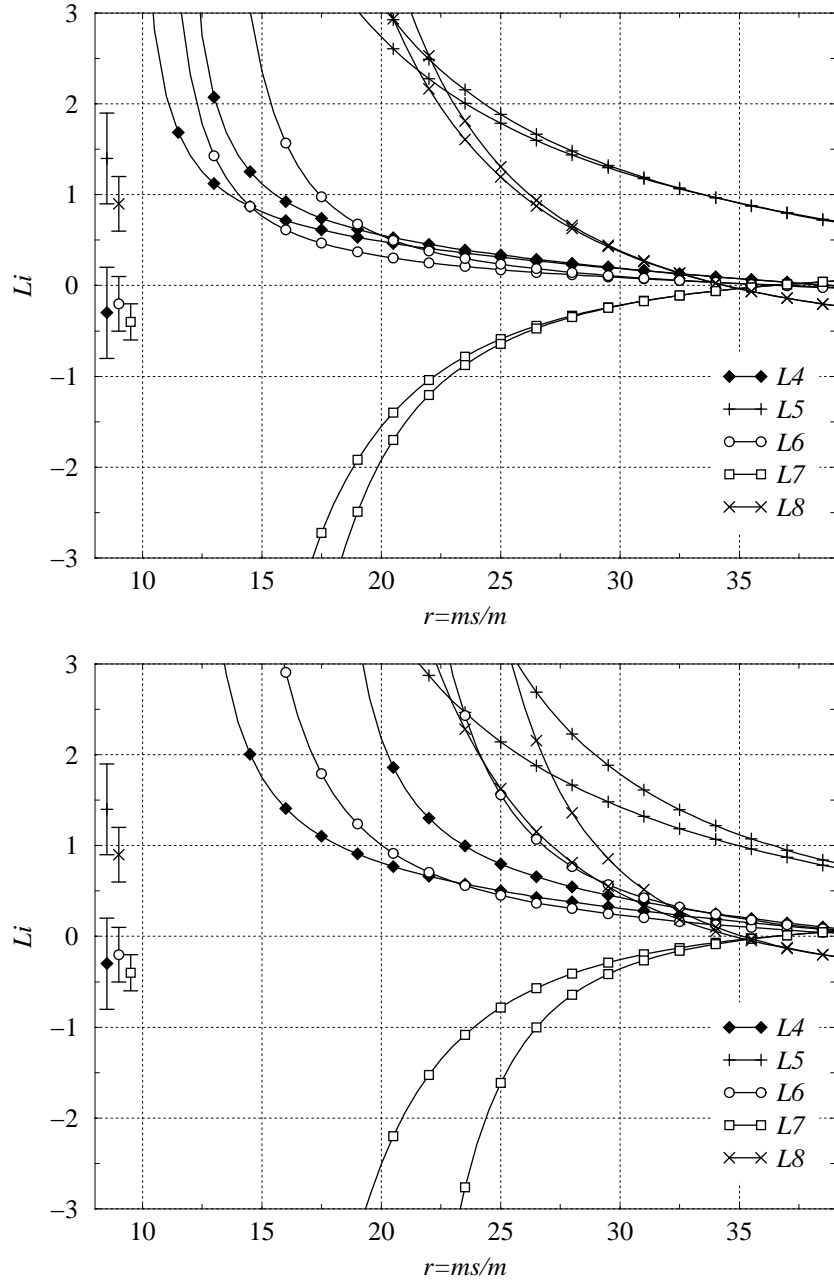


FIG. 4.20 – Règle de somme et pente du facteur de forme étrange du pion : Constantes de basse énergie $L_{i=4\dots 8}(M_\rho) \cdot 10^3$ en fonction de $r = m_s/m$ pour $s_1=1.2$ GeV et $s_0=1.6$ GeV, avec les modèles de matrice T des Refs. [74] (haut) et [77] (bas). Les valeurs indiquées le long de l'axe des ordonnées sont les estimations standard provenant de Ref. [63].

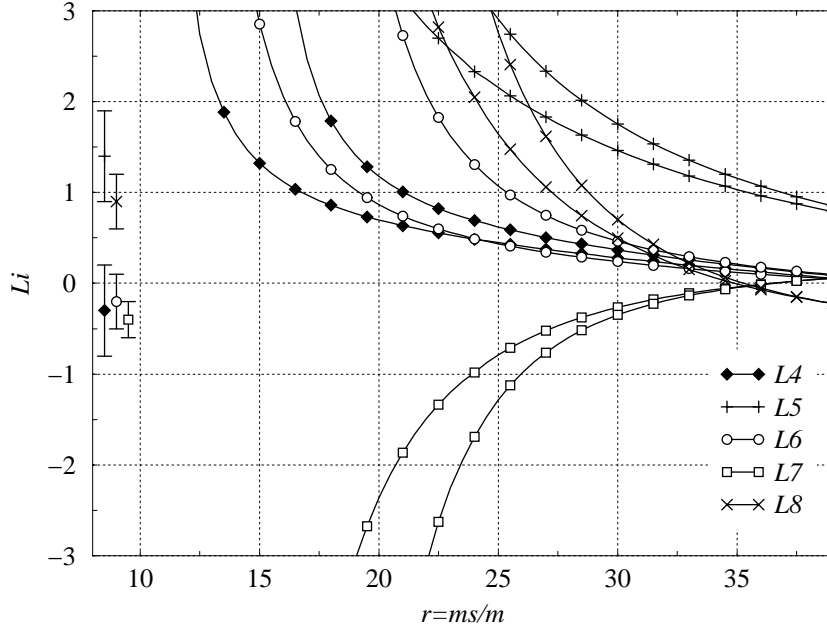


FIG. 4.21 – Règle de somme et pente du facteur de forme étrange du pion : Constantes de basse énergie $L_{i=4\dots 8}(M_\rho) \cdot 10^3$ en fonction de $r = m_s/m$ pour $s_1 = 1.2$ GeV et $s_0 = 1.6$ GeV, avec les modèles de matrice T de Ref. [79] (haut). Les valeurs indiquées le long de l'axe des ordonnées sont les estimations standard provenant de Ref. [63].

4.6 Résumé

On peut relier la différence entre $X(2)$ et $X(3)$ au corrélateur Π des deux densités scalaires $\bar{u}u$ et $\bar{s}s$, pris à impulsion de transfert nulle. Il est possible d'obtenir $\Pi(0)$ à l'aide d'une règle de somme consistant de trois intégrales distinctes. i) La première nécessite de connaître la fonction spectrale $\text{Im}\Pi$ jusqu'à une énergie d'environ 1.2 GeV, en résolvant des équations couplées d'Omnès-Muskhelishvili pour les facteurs de formes scalaires du pion et du kaon. Les solutions dépendent du modèle de matrice T choisi pour décrire les interactions entre les canaux $|\pi\pi\rangle$ et $|\bar{K}K\rangle$, et des dérivées de M_π et M_K par rapport à m et m_s . ii) La deuxième intégrale inclut la contribution de la fonction spectrale $\text{Im}\Pi$ entre 1.2 GeV et 1.6 GeV, où l'approximation à deux canaux ne s'applique plus. Une deuxième règle de somme est utilisée pour obtenir un encadrement grossier de cette intégrale. iii) La troisième intégrale s'effectue sur un grand cercle complexe, avec un rayon suffisant pour exploiter l'expansion en produits d'opérateurs (OPE).

La contribution la plus importante provient de la première intégrale: le pic du $f_0(980)$ donne lieu à une forte valeur de $\Pi(0)$, et donc à une différence importante entre $X(2)$ et $X(3)$. Le chapitre précédent nous avait montré que les observables du secteur pseudoscalaires et la connaissance de $X(3), r, F_0$ nous permettaient de fixer $X(2)$ et les constantes à basse énergie $L_{i=4\dots 8}$. Ces dernières permettent de calculer les dérivées de M_π et M_K par rapport à m et m_s , qui interviennent dans la détermination de $\text{Im}\Pi$. Ainsi, la règle de somme (4.4) peut être vue comme une contrainte, donnant $X(3)$ en fonction de r et F_0 . Cette contrainte comporte plusieurs sources d'incertitudes: les restes d'ordre supérieur dans les expansions de $F_P^2 M_P^2$ et F_P^2 en puissances de masses de quarks, l'estimation grossière de l'intégrale intermédiaire dans la règle de somme, le modèle de matrice T choisi. Les trois modèles de matrice T considérés indiquent néanmoins une forte décroissance de $X(3)$ par rapport à $X(2)$, correspondant à des valeurs positives de $L_6(M_\rho)$.

D'autre part, L_4 (et donc F_0) est lié à la dérivée en 0 du facteur de forme scalaire étrange du pion. Nous avons construit ce dernier pour déterminer la fonction spectrale $\text{Im}\Pi$. Cette deuxième contrainte permet de fixer $X(3)$ et F_0 en fonction de r . Si les conclusions pour $X(3)$ restent inchangées, on aboutit à des valeurs positives de $L_4(M_\rho)$ et à une décroissance notable entre $F(2)$ et $F(3) \equiv F_0$ (de 20% à 30%). On aurait donc une violation importante de la règle de Zweig à la fois pour L_4 et L_6 . Toutefois, cette deuxième contrainte s'appuie sur des détails plus fins d'un facteur de forme (pente en 0), alors que la règle de somme est sensible à l'aspect général de la fonction spectrale $\text{Im}\Pi$ [et surtout à la présence d'un pic prononcé correspondant au $f_0(980)$]. Le rayon scalaire du pion a également été étudié à l'aide des solutions des équations d'Omnès-Muskhelishvili.

Une étude détaillée des expériences sur la diffusion $\pi\pi$ nous permettra de déterminer précisément $X(2)$. Nous avons vu que le condensat de quarks à deux saveurs était fortement corrélé à r . Cette information expérimentale nous permettrait d'affiner notre analyse. Cette règle de somme reste néanmoins une méthode très indirecte, et des expériences étudiant le condensat de quarks à 3 saveurs seront indispensables pour savoir précisément comment la structure chirale du vide évolue entre $N_f = 2$ et $N_f = 3$.

Rappelons qu'une forte décroissance du condensat de quarks avec N_f pourrait être interprétée en suivant la conjecture sur les transitions de phases chirales induites par N_f , décrite dans la Sec. 2.5.4. Mais la décroissance indiquée par la règle de somme pourrait aussi être liée à d'autres phénomènes. Si nous voulons étudier les variations des paramètres d'ordre chiraux au-delà de $N_f = 3$ et tester l'existence de transitions de phases chirales, l'analyse de données expérimentales ne suffit plus. Il faut faire appel à d'autres méthodes.

Chapitre 5

Recherche de $n_{\text{crit}}(N_c)$

Nous avons comparé la structure chirale du vide pour $N_f = 2$ et $N_f = 3$ en nous appuyant sur le spectre des mésons π , K et η et sur la dynamique du secteur 0^{++} . Nous avons constaté une diminution notable du condensat de quarks Σ , et de la constante de désintégration F^2 . Quand N_f augmente nous nous attendons à rencontrer des transitions de phases chirales. Un scénario intéressant consisterait en une succession de trois phases chirales. Dans la première $[N_f < n_{\text{crit}}(N_c)]$, on aurait $\Sigma \neq 0$ et la symétrie chirale brisée. Dans la deuxième $[n_{\text{crit}}(N_c) \leq N_f < N_{\text{crit}}(N_c)]$, le condensat de quarks est nul, mais la symétrie chirale est toujours brisée. Dans la troisième $[N_{\text{crit}}(N_c) \leq N_f]$, la symétrie chirale est restaurée. Si nous voulons savoir comment le mécanisme de brisure de la symétrie chirale évolue au-delà de $N_f = 2-3$ (points critiques, transitions de phases chirales associées), nous ne pouvons plus recourir aux méthodes phénoménologiques des chapitres précédents, et une approche plus théorique s'avère nécessaire.

Si on étudie le spectre de l'opérateur de Dirac sur un tore euclidien, la brisure de la symétrie chirale est liée à l'accumulation de valeurs propres autour de zéro dans la limite de grand volume. Certaines quantités, comme les moments inverses de ces valeurs propres (moyennés sur les configurations gluoniques), seront particulièrement sensibles au mécanisme de brisure spontanée de la symétrie chirale. On peut écrire des règles de somme qui relient le comportement à grand volume des moments inverses à certains paramètres d'ordre chiraux. Ce comportement dépend en particulier de la taille du condensat de quarks, et pourrait donc dépendre fortement de N_f . On l'étudie dans les cas d'un condensat grand, nul, ou petit. S'il existe une phase intermédiaire, où la symétrie chirale est brisée mais le condensat nul, certaines combinaisons des moments inverses devraient être particulièrement sensibles à l'approche de cette phase. L'application aux simulations sur réseau offre certaines caractéristiques intéressantes [24].

5.1 Fonction de partition à petite masse et grand volume

5.1.1 Fonction de partition de QCD euclidienne sur un tore

Le lagrangien euclidien de QCD pour N_f quarks légers est de la forme:

$$\mathcal{L}^{(N_f)} = \frac{1}{4g^2} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a - i\theta\nu - i\bar{q}\not{D}q + \bar{q}\tilde{M}q, \quad (5.1)$$

avec la matrice de masse de quarks \tilde{M} :

$$\tilde{M} = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)M + \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)M^\dagger, \quad (5.2)$$

où M est une matrice complexe $N_f \times N_f$, diagonalisable et de valeurs propres réelles positives.¹

La fonction de partition de cette théorie s'écrit:

$$Z^\theta(N_f) = \mathcal{C} \int [dG] \int [d\bar{\psi}][d\psi] \exp \left(- \int_V d^4x \mathcal{L}^{(N_f)} \right), \quad (5.3)$$

avec une constante de normalisation \mathcal{C} qui peut dépendre du volume, mais pas de la matrice de masse. Z^θ peut être décomposée en modes de Fourier selon le nombre d'enroulement:

$$Z^\theta(N_f) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu\theta} Z_\nu(N_f). \quad (5.4)$$

Chaque projection de nombre d'enroulement ν positif est:

$$Z_\nu(N_f) = \mathcal{C} \int_\nu [dG] e^{-S_{\text{YM}}[G]} \det(-i\not{D} + \tilde{M}) \quad (5.5)$$

$$= \mathcal{C} \int_\nu [dG] e^{-S_g[G]} (\det_f M)^\nu \prod_n' \left[\frac{\det_f(\lambda_n^2 + M M^\dagger)}{(\omega_n^2 + \mu^2)^{N_f}} \right], \quad (5.6)$$

\int_ν désigne l'intégration sur l'ensemble des configurations gluoniques possédant un nombre d'enroulement ν fixé, tandis que S_g est l'action gluonique pure. $\det_f M$ est le déterminant de la matrice de masse de quarks $N_f \times N_f$

1. Dans ce chapitre, toutes les expressions seront écrites dans la métrique euclidienne, sauf indication expresse. Nous nous placerons dans des situations où les quarks lourds peuvent être négligés.

(il est remplacé par $(\det_f M^\dagger)^{-\nu}$ quand $\nu \leq 0$). Le produit primé inclut seulement les valeurs propres strictement positives. La borne de Vafa-Witten (2.46) apparaît au dénominateur, accompagnée d'une échelle de masse μ plus grande que n'importe quelle masse de quark léger. Grâce à cette normalisation (qui n'affecte aucune observable), chaque facteur du produit primé est plus petit que 1 lorsque les masses de quarks tendent vers zéro. Cette normalisation est tout à fait analogue à celle du déterminant fermionique dans l'équation (2.49). Remarquons que la matrice de masse de quarks et l'angle du vide apparaissent dans la fonction de partition via le produit $M \cdot \exp(i\theta/N_f)$, ce qui est en accord avec l'identité de Ward anormale du courant axial singlet et la discussion terminant la Sec. 3.3.3.

La fonction de partition pour $\nu \geq 0$ est:

$$Z_\nu(N_f) = \mathcal{C} \int_\nu [dG] e^{-S_g[G]} (\det_f M)^\nu \times \left(\prod'_n \frac{\lambda_n^2}{\omega_n^2 + \mu^2} \right)^{N_f} \exp \left[\left\langle \sum'_n \log \left(1 + \frac{M M^\dagger}{\lambda_n^2} \right) \right\rangle \right], \quad (5.7)$$

A partir du moment où la fonction de partition est régularisée, nous pouvons faire l'expansion du logarithme pour de petites masses (en comparaison avec la taille de la boîte) [89]:

$$\begin{aligned} Z_\nu(N_f) &= \mathcal{C} \int_\nu [dG] e^{-S_g[G]} (\det_f M)^\nu \left(\prod'_n \frac{\lambda_n^2}{\omega_n^2 + \mu^2} \right)^{N_f} \\ &\quad \times \exp \left[\langle M^\dagger M \rangle \sigma_2 - \frac{1}{2} \langle (M^\dagger M)^2 \rangle \sigma_4 + O(M^6) \right] \\ &= \mathcal{C}'_\nu (\det_f M)^\nu \left[1 + \langle M^\dagger M \rangle \langle \sigma_2 \rangle_\nu^{(N_f)} - \frac{1}{2} \langle (M^\dagger M)^2 \rangle \langle \sigma_4 \rangle_\nu^{(N_f)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \langle M^\dagger M \rangle^2 \langle (\sigma_2)^2 \rangle_\nu^{(N_f)} + O(M^6) \right]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Les moments inverses des valeurs propres de l'opérateur de Dirac sont définis pour chaque configuration gluonique comme: $\sigma_k = \sum'_n 1/\lambda_n^k$. Le facteur de normalisation \mathcal{C}'_ν est indépendant de la matrice de masse de quarks:

$$\mathcal{C}'_\nu = \mathcal{C} \int_\nu [dG] e^{-S_g[G]} \left(\prod'_n \frac{\lambda_n^2}{\omega_n^2 + \mu^2} \right)^{N_f}. \quad (5.10)$$

La moyenne sur les configurations gluoniques (à nombre d'enroulement fixé) est définie par:

$$\langle \langle W \rangle \rangle_\nu^{(N_f)} = \frac{\int_\nu [dG] e^{-S_g[G]} \left(\prod'_n \lambda_n^2 \right)^{N_f} W}{\int_\nu [dG] e^{-S_g[G]} \left(\prod'_n \lambda_n^2 \right)^{N_f}}. \quad (5.11)$$

où le dénominateur est une simple normalisation, telle que $\langle\langle 1 \rangle\rangle_\nu = 1$. Dans (5.9), cette moyenne est appliquée aux moments inverses σ_k , qui sont particulièrement sensibles à l'extrémité infrarouge du spectre de Dirac. D'autre part, $\langle\langle \rangle\rangle_\nu^{(N_f)}$ inclut le produit des valeurs propres positives, ce qui devrait supprimer le poids statistique des plus basses valeurs propres quand N_f augmente. On retrouve une situation analogue au cas des paramètres d'ordre chiraux dominés par les plus basses valeurs propres de l'opérateur de Dirac. Les moments inverses moyennés qui apparaissent dans l'exponentielle (5.9) devraient être assez sensibles à N_f .

(5.8) contient plusieurs sources de divergences. **i)** Considérons d'abord la configuration gluonique comme un champ extérieur fixé. Dans le secteur fermionique, les sommes sur le spectre de Dirac peuvent diverger en raison de la queue ultraviolette de ce dernier. Pour $\lambda \rightarrow \infty$, le nombre de valeurs propres dans l'intervalle $[\lambda, \lambda + \Delta\lambda]$ est donné par la théorie libre:

$$\Delta n = \frac{N_C}{4\pi^2} V |\lambda|^3 \Delta\lambda. \quad (5.12)$$

Les divergences ultraviolettes qui en résultent pour les moments inverses doivent être soustraites:

$$\sigma_2 = \tilde{\sigma}_2 + D_2^{(N_f)}, \quad \sigma_4 = \tilde{\sigma}_4 + D_4^{(N_f)}, \quad (5.13)$$

où la partie divergente est incluse dans D et $\tilde{\sigma}$ est fini. Nous pouvons par exemple choisir un cutoff ultraviolet Λ et définir l'entier K tel que $\omega_K = \Lambda$. Les moments inverse régularisés seront:

$$\tilde{\sigma}_k = \sum_{n=1}^K \frac{1}{(\lambda_n)^k}, \quad (5.14)$$

et les parties divergentes se comporteront (à l'ordre dominant en V) comme:

$$D_2^{(N_f)} \sim V \Lambda^2, \quad D_4^{(N_f)} \sim V \ln \Lambda. \quad (5.15)$$

Ces contributions de courte distance sont identiques, quel que soit le secteur gluonique considéré (i.e. quelle que soit la valeur de ν). Si nous insérons (5.13) dans (5.8), nous obtenons la fonction de partition régularisée \tilde{Z}_ν (avec les moments inverses $\tilde{\sigma}$) multipliée par un facteur exponentiel contenant des contretermes divergents qui contribuent seulement à l'énergie du vide:

$$Z_\nu(N_f) = \tilde{Z}_\nu(N_f) \exp \left[D_2^{(N_f)} \langle M^\dagger M \rangle - \frac{1}{2} D_4^{(N_f)} \langle (M^\dagger M)^2 \rangle \right]. \quad (5.16)$$

ii) En second lieu, le produit sur les valeurs propres dans le déterminant fermionique de (5.11) doit être déjà régularisé pour une configuration gluonique fixée. Il s'agit toutefois ici d'observables dominées par les plus petites valeurs propres de l'opérateur de Dirac. Nous espérons donc qu'elles seront peu sensibles à la queue ultraviolette de ce déterminant.

iii) Jusqu'à présent, nous avons envisagé la configuration gluonique comme un champ externe. Toutefois, l'intégration sur les champs de gluons aboutit à une troisième série de divergences. La régularisation de ces dernières est heureusement peu liée au secteur fermionique [90]. Par exemple, le cut-off utilisé peut être choisi indépendamment de Λ . Il suffira ici de considérer une renormalisation multiplicative de la matrice de masse et des valeurs propres de Dirac:

$$M \rightarrow Z_m M, \quad \lambda_n \rightarrow Z_m \lambda_n, \quad (5.17)$$

ce qui induit une renormalisation multiplicative de $\langle\langle \sigma_k \rangle\rangle_\nu^{(N_f)}$. Nous nous limiterons à des quantités homogènes, comme des rapports de moments inverses possédant le même degré d'homogénéité en λ . Nous ne nous intéresserons donc plus au problème de la renormalisation du secteur gluonique.

5.1.2 Lagrangien effectif

Si on prend une boîte suffisamment vaste, les excitations massives de QCD (telles les mésons ρ) seront exponentiellement supprimés de la fonction de partition euclidienne. On peut alors décrire le comportement du système à grand volume à l'aide d'un lagrangien effectif pour les bosons de Goldstone [91, 92].

Soit $L_0 \dots L_{d-1}$ les dimensions de la boîte. Si nous écrivons la fonction de partition de QCD à température finie (x_0 étant la coordonnée temporelle), elle sera dominée par les excitations de basse énergie du système à $(d-1)$ dimensions. Dès lors, le lagrangien effectif qui décrira ce système dépendra de $L_1 \dots L_d$, mais pas de L_0 car ce dernier n'intervient que dans les conditions aux limites (périodiques) pour les champs décrivant les bosons de Goldstone. Mais la boîte possède une symétrie euclidienne qui nous permet d'intervertir les axes, et si le lagrangien effectif est indépendant de L_0 , il l'est de toutes les dimensions de la boîte (ici identiques).

Les paramètres du lagrangien effectif sont identiques sur un tore ou dans un volume infini. La seule différence réside dans les des conditions aux limites. Si U décrit les bosons de Goldstone, on aura :

$$U(x + n \cdot L) = U(x), \quad n = (n_0, n_1, n_2, n_3), \quad (5.18)$$

Cette identification modifie les propagateurs correspondants, tels celui du pion :

$$G_\pi(x) = \frac{1}{V} \sum_p \frac{e^{ip \cdot x}}{M_\pi^2 + p^2} \quad (5.19)$$

où p_μ est un vecteur de la forme $(n_0, n_1, n_2, n_3)/L$ avec n_i entiers. La masse du pion, comme tous les autres paramètres du lagrangien effectif, est identique à celle pour un volume infini.

D'après Sec. 3.3.2, la fonction de partition à θ donné s'écrit donc :

$$Z^\theta(N_f) = \int [dU] \exp \left[- \int_V d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}}^{(N_f)}(U, \partial U, M e^{i\theta/N_f}) \right]. \quad (5.20)$$

où $U(x) \in \text{SU}(N_f)$ rassemble les bosons de Goldstone. La projection sur un nombre d'enroulement fixé donne [89] :

$$\begin{aligned} Z_\nu(N_f) &= \int \frac{d\theta}{2\pi} e^{-i\nu\theta} \int [dU] \exp \left[- \int_V d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}}^{(N_f)}(U, M e^{i\theta/N_f}) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int [d\tilde{U}] (\det \tilde{U})^\nu \exp \left[- \int_V d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}}^{(N_f)}(\tilde{U}, M) \right], \end{aligned} \quad (5.21)$$

avec $\tilde{U}(x) = U(x) \exp(-i\theta/N_f)$. L'intégrale de chemins sur $\text{SU}(N_f)$ pour la fonction de partition Z^θ devient une intégrale sur $\text{U}(N_f)$ pour Z_ν . En raison des propriétés d'invariance des mesures $[dU]$ et $[d\tilde{U}]$, nous avons pour tout $V_1, V_2 \in \text{U}(N_f)$:

$$Z_\nu(N_f | V_1 M V_2) = (\det V_1 V_2)^\nu Z_\nu(N_f | M). \quad (5.22)$$

Les constantes de basse énergie de \mathcal{L}_{eff} sont indépendantes du volume. Ce sont des paramètres d'ordre qui varient avec N_f . D'après la Sec. 3.4, l'expansion de \mathcal{L}_{eff} sera différente selon la taille du condensat de quarks. Si nous admettons le scénario à 3 phases de la Sec. 2.5.4, il faut envisager trois positions pour N_f : très inférieur, légèrement inférieur ou supérieur à $n_{\text{crit}}(N_c)$.

5.2 Comportement dominant des moments inverses à grand volume

5.2.1 Correspondance entre QCD et théorie effective

Si nous analysons perturbativement la fonction de partition (5.20), la seule différence par rapport à un volume infini provient du propagateur des

mésos, en raison des conditions aux limites périodiques. Au sein du propagateur (5.19), la contribution du mode $p = 0$ va exploser dans la limite chirale, où la masse des pions tend vers zéro [91]. Les graphes contenant ces modes d'impulsion nulle vont diverger dans la limite chirale, tandis que les modes d'impulsion non-nulle resteront. Les fluctuations de modes d'impulsion nulle ne sont pas gaussiennes et ne peuvent être traitées perturbativement (modes collectifs). Pour les prendre en compte correctement, nous séparons les champs des bosons de Goldstone en deux matrices unitaires: $U(x) = U_0 U_1(x)$, où le facteur constant U_0 décrit les modes de moment nul et $U_1(x)$ ceux de moment non-nul.

En première approximation (pour des volumes suffisamment grands), les fluctuations gaussiennes de U_1 peuvent être négligées et l'intégrale de chemin de Z se réduit à une intégrale de groupe sur des matrices constantes de $SU(N_f)$:

$$Z^\theta(N_f) = \mathcal{D} \int_{SU(N_f)} [dU_0] \exp \left[-V \mathcal{L}_{\text{eff}}^{(N_f)}(U_0, M \exp(i\theta/N_f)) \right]. \quad (5.23)$$

où $[dU_0]$ est la mesure de Haar sur le groupe, et \mathcal{D} est une constante de normalisation, indépendante de la matrice de masse. La projection sur un secteur topologique (5.21) s'écrit:

$$Z_\nu(N_f) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{D} \int_{U(N_f)} [d\tilde{U}_0] (\det \tilde{U}_0)^\nu \exp \left[-V \mathcal{L}_{\text{eff}}^{(N_f)}(\tilde{U}_0, M) \right]. \quad (5.24)$$

Pour alléger les notations, nous noterons \tilde{U}_0 au lieu de U quand nous nous limitons à l'ordre dominant de Z_ν .

Nous voulons faire l'expansion de Z_ν par rapport à la taille de la boîte et à la matrice de masse des quarks. En fait, (5.23) nous indique comment procéder à partir de l'expansion de \mathcal{L}_{eff} . A l'ordre dominant, la fonction de partition va dépendre d'une seule variable d'échelle $X = ML^\kappa$. Sous $n_{\text{crit}}(N_c)$, nous avons $\kappa = 4$, tandis que la phase avec un condensat nul donne $\kappa = 2$. Pour X petit, l'expansion de Z_ν s'écrit:

$$\begin{aligned} Z_\nu &= \mathcal{N}_\nu (\det X)^\nu [1 + a_\nu \langle X^\dagger X \rangle \\ &\quad + b_\nu \langle X^\dagger X \rangle^2 + c_\nu \langle (X^\dagger X)^2 \rangle + O(X^6)], \end{aligned} \quad (5.25)$$

où les coefficients \mathcal{N}_ν , a_ν , b_ν , c_ν ne dépendent pas de M . Cette expansion est valable pour $\nu \geq 0$: pour ν négatif, $(\det X^\dagger)^{|\nu|}$ remplace $(\det X)^\nu$. Les calculs sont tout à fait semblables dans les deux cas, et nos résultats peuvent être réécrits pour un nombre d'enroulement arbitraire en remplaçant ν par sa valeur absolue.

(5.9) fournit l'expansion de la fonction de partition de QCD comme un polynôme en masses de quark:

$$Z_\nu = \mathcal{C}'_\nu L^{-\kappa\nu N_f} (\det_f X)^\nu \quad (5.26)$$

$$\left[1 + \frac{1}{L^{2\kappa}} \langle X^\dagger X \rangle \langle\langle \sigma_2 \rangle\rangle_\nu^{(N_f)} - \frac{1}{2L^{4\kappa}} \langle (X^\dagger X)^2 \rangle \langle\langle \sigma_4 \rangle\rangle_\nu^{(N_f)} \right. \\ \left. + \frac{1}{2L^{4\kappa}} \langle X^\dagger X \rangle^2 \langle\langle (\sigma_2)^2 \rangle\rangle_\nu^{(N_f)} + O(X^6) \right].$$

En identifiant la même puissance de X dans les deux expansions, on obtient des relations entre les paramètres du lagrangien effectif et le comportement dominant des moments inverses à grand volume².

Quand nous comparons (5.25) et (5.26), il nous faut tenir compte des divergences des moments inverses σ_k , comme indiqué dans (5.16):

$$Z_\nu = \tilde{Z}_\nu \exp \left[D_2 \langle M^\dagger M \rangle - \frac{1}{2} D_4 \langle (M^\dagger M)^2 \rangle \right] \sim Z_\nu^{\chi\text{PT}}. \quad (5.27)$$

Ces contretermes, construits à l'aide de traces de la matrice de masses de quarks, sont aussi présent quand la fonction de partition est exprimée dans le cadre de la théorie de perturbation chirale. Ainsi, le comportement divergent des moments inverses (tel D_2 pour σ_2) peut être suivi à l'aide des contretermes du lagrangien de χPT (\mathcal{H} ici). Des règles de somme sans divergence peuvent être écrites en choisissant des combinaisons linéaires où les contretermes correspondants de χPT s'éliminent.

5.2.2 $N_f \ll n_{\text{crit}}(N_c)$: règles de somme de Leutwyler-Smilga

Ce cas a été traité en détail dans [89]. Loin du point critique, (5.24) donne à l'ordre dominant:

$$Z_\nu(N_f) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{D} \int_{U(N_f)} [dU] (\det U)^\nu \exp \left[\frac{\Sigma V}{2} \langle U^\dagger M + M^\dagger U \rangle \right]. \quad (5.28)$$

2. Nous développons la fonction de partition en puissances de $X = ML^\kappa$, et nous nous intéresserons au comportement à grand volume des moments inverses $\langle\langle \sigma_k \rangle\rangle$. Le lagrangien effectif que nous considérerons décrira la brisure de $\text{SU}_L(N_f) \otimes \text{SU}_R(N_f)$ et les seuls quarks de la théorie seront les N_f quarks légers de masse nulle dans la limite chirale. Le cas $N_f = 2$ doit donc être considéré attentivement. Dans les chapitres précédents, la notation $N_f = 2$ se référait à la limite chirale: $m_u, m_d \rightarrow 0$ avec m_s fixé à sa valeur physique. Ici, la théorie $N_f = 2$ ne comprend que deux quarks (de masse nulle dans la limite chirale) et n'inclut pas de quark de masse intermédiaire (non nulle dans la limite chirale, mais inférieure à Λ_H). Dans ce chapitre, la théorie $\text{SU}_L(2) \otimes \text{SU}_R(2)$ peut être vue comme la limite $m_s \rightarrow \infty$ de QCD où le quark s découple.

$VM\Sigma$ est le seul paramètre de l'intégrale de groupe, et la variable d'échelle est $X = ML^4$ ($\kappa = 4$). Pour une matrice arbitraire M , une formule explicite pour l'intégrale (5.28) a été discutée dans [93]. Toutefois, il nous suffira ici de suivre la méthode originale décrite dans [89] pour faire l'expansion de (5.28) en puissances de M . Nous obtenons les coefficients d'expansion a_ν, b_ν, \dots grâce à deux opérateurs de dérivation, appliqués sur les deux expressions de Z_ν : l'intégrale de groupe (5.28) et l'expansion en X (5.25). On applique sur cette dernière:

$$\sum_a \frac{\partial}{\partial X_a} \frac{\partial}{\partial X_a^*} Z_\nu = \mathcal{N}_\nu(\det X)^\nu \quad (5.29)$$

$$\times \left\{ \frac{N_f K}{2} a_\nu + \langle X^\dagger X \rangle [(N_f K + 1)b_\nu + (N_f + K)c_\nu] + O(X^4) \right\}$$

et

$$\sum_{abcd} \langle t_a t_b t_c t_d \rangle \frac{\partial}{\partial X_a} \frac{\partial}{\partial X_b^*} \frac{\partial}{\partial X_c} \frac{\partial}{\partial X_d^*} Z_\nu = \mathcal{N}_\nu(\det X)^\nu \quad (5.30)$$

$$\times \frac{N_f K}{8} \{ (N_f + K)b_\nu + (N_f K + 1)c_\nu + O(X^2) \},$$

où $K = N_f + \nu$, et X_a sont les coordonnées de X dans la base $\{t_a\}$ ($a = 0 \dots N_f^2 - 1$), qui est un ensemble complet de matrices hermitiennes (leurs propriétés sont décrites dans l'Appendice A.2).

Les mêmes opérateurs de dérivations peuvent être appliqués à l'intégrale de groupe (5.28):

$$\sum_a \frac{\partial}{\partial X_a} \frac{\partial}{\partial X_a^*} Z_\nu = \frac{1}{8} N_f \Sigma^2 Z_\nu, \quad (5.31)$$

$$\sum_{abcd} \langle t_a t_b t_c t_d \rangle \frac{\partial}{\partial X_a} \frac{\partial}{\partial X_b^*} \frac{\partial}{\partial X_c} \frac{\partial}{\partial X_d^*} Z_\nu = \frac{1}{256} N_f \Sigma^4 Z_\nu. \quad (5.32)$$

Une fois que l'on a substitué à Z_ν son expansion en X (5.25) dans la partie droite de (5.31) et (5.32), ces équations constituent des polynômes en X . Ceux-ci peuvent être identifiés à (5.29) and (5.30), ordre par ordre en puissance de X . Nous obtenons ainsi a_ν et un système linéaire de deux équations pour b_ν et c_ν .

Une fois a_ν, b_ν et c_ν calculés, la comparaison de (5.25) et (5.26) aboutit aux règles de somme de Leutwyler-Smilga:

$$\langle\langle \sigma_2 \rangle\rangle_\nu^{(N_f)} = a_\nu = \frac{[V\Sigma(N_f)]^2}{4K}, \quad (5.33)$$

$$\langle\langle(\sigma_2)^2\rangle\rangle_\nu^{(N_f)} = 2b_\nu = \frac{[V\Sigma(N_f)]^4}{16(K^2 - 1)}, \quad (5.34)$$

$$\langle\langle\sigma_4\rangle\rangle_\nu^{(N_f)} = -2c_\nu = \frac{[V\Sigma(N_f)]^4}{16K(K^2 - 1)}. \quad (5.35)$$

$K = N_f + |\nu|$ fait apparaître une dépendance explicite sur le nombre de saveurs dans les règles de somme (5.33)-(5.35). Mais il y a une autre dépendance (implicite et inconnue) provenant du condensat de quark $\Sigma(N_f)$.

Aucun contreterme divergent n'est explicitement présent. Ces règles de somme sont dérivées à partir de l'ordre dominant du lagrangien effectif en χ PT standard. Elles ne montrent que le comportement asymptotique des moments inverses, quand $V \rightarrow \infty$. Ainsi, σ_2 et $(\sigma_2)^2$ contiennent des termes sous-dominants divergents³.

5.2.3 $N_f > n_{\text{crit}}(N_C)$: la phase avec un condensat de quarks nul

Pour $N_f > n_{\text{crit}}(N_C)$, l'intégrale qui donne Z_ν en fonction du lagrangien effectif (5.24) fait intervenir, à l'ordre dominant, des termes quadratiques en masse:

$$\begin{aligned} Z_\nu(N_f) = & \frac{1}{2\pi} \mathcal{D} \int_{U(N_f)} [dU] (\det U)^\nu \\ & \times \exp \left[\frac{V}{4} \left\{ \mathcal{A} \langle (U^\dagger M)^2 + (M^\dagger U)^2 \rangle + \mathcal{Z}_S \langle U^\dagger M + M^\dagger U \rangle^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \mathcal{Z}_P \langle U^\dagger M - M^\dagger U \rangle^2 + \mathcal{H} \langle M^\dagger M \rangle \right\} \right], \end{aligned} \quad (5.36)$$

où $\mathcal{A} = F^2 A$, $\mathcal{Z}_S = F^2 Z_S$, $\mathcal{Z}_P = F^2 Z_P$, $\mathcal{H} = F^2 H$. La variable d'échelle est maintenant $X = ML^2$ ($\kappa = 2$). Le contreterme \mathcal{H} possède la même structure que le terme divergent D_2 provenant de σ_2 dans (5.27). Pour éliminer cette divergence, il est naturel d'introduire la fluctuation (dépendante de ν): $\bar{\sigma}_2 = \sigma_2 - \langle\langle\sigma_2\rangle\rangle_\nu^{(N_f)}$. La soustraction de cette divergence quadratique conduit à perdre une seule règle de somme, par exemple $\langle\langle\sigma_2\rangle\rangle_0^{(N_f)}$. En effet, on peut écrire pour les autres secteurs topologiques des règles de somme pour $\langle\langle\sigma_2\rangle\rangle_\nu^{(N_f)} - \langle\langle\sigma_2\rangle\rangle_0^{(N_f)}$, car la divergence (de courte distance) liée à \mathcal{H} n'est pas sensible au nombre d'enroulement (invariant topologique).

Par chiralité, l'intégrale (5.36) est nulle sauf si U et U^\dagger y apparaissent avec la même puissance. Le déterminant $(\det U)^\nu$ compte comme la νN_f -ième puissance de U , alors que l'exponentielle ne comprend que le carré de

3. Cela rend très délicate l'application des formules (5.33) et (5.34) à des volumes finis.

U^\dagger . Dès lors, la phase avec un nombre de saveurs impair supérieur à $n_{\text{crit}}(N_c)$ ne traite pas de manière équivalente tous les secteurs topologiques. Dans la limite de grand volume, les secteurs avec ν impair sont supprimés par rapport aux secteurs pairs (cette discrimination n'a pas lieu pour N_f pair). En fait, la symétrie $M \rightarrow -M$ est équivalente à $\theta \rightarrow \theta + \pi N_f$. La décomposition de Fourier (5.4) permet de vérifier directement que les secteurs topologiques impairs ont une fonction de partition nulle à l'ordre dominant, à condition que N_f soit impair. Les ordres supérieurs du lagrangien effectif (tel $\tilde{\mathcal{L}}_3$) vont évidemment contribuer aux secteurs topologiques impairs. Cela aboutira pour Z_ν à une dépendance en volume différente du cas où ν est pair.

Dans le secteur topologiquement trivial $\nu = 0$, $(\det U)^\nu$ disparaît de l'intégrale de groupe. L'exponentielle de (5.36) peut être directement développée en puissances de X et intégrée sur $U(N)$. À l'aide de l'appendice A.2, il est facile de calculer les premières puissances de l'expansion en X pour obtenir les règles de somme:

$$\begin{aligned} \langle\langle (\bar{\sigma}_2)^2 \rangle\rangle_0 &= \frac{V^2}{16N_f^2(N_f^2 - 1)} \\ &\quad \times [4(2N_f^2 + 1)(\mathcal{Z}_S^2 + \mathcal{Z}_P^2) - 8\mathcal{Z}_S\mathcal{Z}_P \\ &\quad - 8N_f\mathcal{A}(\mathcal{Z}_S + \mathcal{Z}_P) + 4N_f^2\mathcal{A}^2], \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} \langle\langle \sigma_4 \rangle\rangle_0 &= \frac{V^2}{16N_f(N_f^2 - 1)} \\ &\quad \times [12(\mathcal{Z}_S^2 + \mathcal{Z}_P^2) - 8\mathcal{Z}_S\mathcal{Z}_P - 8N_f\mathcal{A}(\mathcal{Z}_S + \mathcal{Z}_P) + 4\mathcal{A}^2]. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Ainsi que la précédente section le soulignait, ces règles de somme dépendent du nombre de saveurs légères de manière explicite, mais aussi implicite à travers les paramètres d'ordre (dépendants de N_f) \mathcal{A} , \mathcal{Z}_S and \mathcal{Z}_P .

Ces règles de somme prédisent un comportement à grand volume différent des règles de somme de Leutwyler-Smilga (5.33)-(5.35). Ceci s'accorde avec la discussion de la section 2.4.3 [43]. Les valeurs propres s'accumulant comme $1/L^4$ contribuent à la fois à la brisure de la symétrie chirale et au condensat de quarks. Pour $N_f < n_{\text{crit}}(N_c)$, le comportement asymptotique indiqué par les règles de somme est:

$$\left\langle\left\langle \sum_n' \frac{1}{\lambda_n^2} \right\rangle\right\rangle_0 \sim V^2, \quad \left\langle\left\langle \sum_n' \frac{1}{\lambda_n^4} \right\rangle\right\rangle_0 \sim V^4. \quad (5.39)$$

Au contraire, les valeurs propres en $1/L^2$ ne contribuent pas au condensat de quarks, mais peuvent encore contribuer à la brisure de la symétrie chirale dans la phase au-dessus de $n_{\text{crit}}(N_c)$ en donnant $F^2(N_f) \neq 0$. Nous

constatons effectivement que dans cette phase, (5.37) et (5.38) prédisent un comportement asymptotique proportionnel à V^2 pour $\langle\langle(\bar{\sigma}_2)^2\rangle\rangle_0$ et $\langle\langle\sigma_4\rangle\rangle_0$.

5.3 L'approche du point critique

5.3.1 Comportement dominant à grand volume

Nous allons maintenant étudier le cas intermédiaire : pour un certain intervalle de volumes, il peut y avoir compétition entre le terme du lagrangien effectif qui est linéaire en masse de quarks, et ceux qui sont quadratiques. Pour savoir à quels résultats s'attendre, il est instructif de considérer d'abord la théorie de perturbations chirale à volume infini, et d'imaginer que nous faisons varier les masses de quarks. Si le condensat de quarks s'écarte (même très légèrement) de zéro, on peut toujours trouver des masses de quarks assez petites pour que le terme linéaire en masse domine. Quand les quarks deviennent massifs, les corrections provenant des termes quadratiques peuvent devenir visibles et mêmes prépondérantes, à condition que le condensat de quarks ne soit pas trop grand et ne cache pas cet effet.

Nous travaillons ici dans une boîte de grand volume fixé, et M_π^2 compte comme $O(1/L^4)$. Modifier la masse des quarks revient donc à changer le volume. Pour $N_f < n_{\text{crit}}(N_c)$, les règles de somme de Leutwyler-Smilga obtenues en χ PT standard devrait décrire correctement la dépendance en volume des moments inverses, lorsque L tend vers l'infini. Toutefois, à proximité du point critique et pour une valeur donnée du volume, le condensat de quarks peut ne pas être suffisamment grand pour que \mathcal{L}_2 , Eq. (3.35), domine. Ceci pourrait conduire à d'importantes déviations par rapport à la limite asymptotique, même pour de grands volumes.

Dans ce cas, l'ordre dominant du lagrangien est $\tilde{\mathcal{L}}_2$ (3.38) et Z_ν s'écrit :

$$\begin{aligned} Z_\nu = & \frac{1}{2\pi} \mathcal{D} \int_{U(N_f)} [dU] (\det U)^\nu \\ & \times \exp \left[\frac{V}{4} \left\{ 2\Sigma \langle U^\dagger M + M^\dagger U \rangle + \mathcal{A} \langle (U^\dagger M)^2 + (M^\dagger U)^2 \rangle \right. \right. \\ & \left. \left. + \mathcal{Z}_S \langle U^\dagger M + M^\dagger U \rangle^2 + \mathcal{Z}_P \langle U^\dagger M - M^\dagger U \rangle^2 + \mathcal{H} \langle M^\dagger M \rangle \right\} \right]. \end{aligned} \quad (5.40)$$

$X = ML^2$ reste le paramètre d'échelle associé à la masse, et ΣL^2 est la variable d'expansion pour le condensat de quarks. Cela organise l'expansion selon le comptage en puissance $\Sigma \sim M \sim 1/L^2$ similaire à χ PT généralisée.

Pour évaluer (5.40), il est utile de définir l'intégrale de groupe I_ν pour des nombres complexes arbitraires $(b, \bar{b}, z, \bar{z}, y, a, \bar{a})$:

$$I_\nu = \int_{U(N_f)} [dU] (\det U)^\nu \times \exp[b\langle XU^\dagger \rangle + \bar{b}\langle X^\dagger U \rangle + z\langle XU^\dagger \rangle^2 + \bar{z}\langle X^\dagger U \rangle^2 + y\langle XU^\dagger \rangle \langle X^\dagger U \rangle + a\langle (XU^\dagger)^2 \rangle + \bar{a}\langle (X^\dagger U)^2 \rangle], \quad (5.41)$$

La fonction de partition à nombre d'enroulement fixé s'écrit:

$$Z_\nu = \frac{1}{2\pi} \mathcal{D} \exp[h^0 \langle X^\dagger X \rangle] I_\nu(b^0, \bar{b}^0, z^0, \bar{z}^0, y^0, a^0, \bar{a}^0; X), \quad (5.42)$$

où I_ν est calculée au point:

$$b^0 = \bar{b}^0 = \frac{1}{2} L^2 \Sigma, \quad (5.43)$$

$$z^0 = \bar{z}^0 = \frac{1}{4} (\mathcal{Z}_S + \mathcal{Z}_P), \quad y^0 = \frac{1}{2} (\mathcal{Z}_S - \mathcal{Z}_P), \quad (5.44)$$

$$a^0 = \bar{a}^0 = \frac{1}{4} \mathcal{A}, \quad h^0 = \frac{1}{4} \mathcal{H}. \quad (5.45)$$

I_ν est un polynôme en $(b, \bar{b}, z, \bar{z}, y, a, \bar{a})$, et ses dérivées ne sont pas indépendantes:

$$\frac{\partial^2 I_\nu}{\partial b^2} = \frac{\partial I_\nu}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 I_\nu}{\partial \bar{b}^2} = \frac{\partial I_\nu}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial^2 I_\nu}{\partial b \partial \bar{b}} = \frac{\partial I_\nu}{\partial y} \quad (5.46)$$

Nous développons cette intégrale en puissances de X , avec des coefficients indépendants de la matrice de masse des quarks:

$$I_\nu = (\det X)^\nu [\alpha_\nu + \beta_\nu \langle X^\dagger X \rangle + \gamma_\nu \langle X^\dagger X \rangle^2 + \delta_\nu \langle (X^\dagger X)^2 \rangle + \epsilon_\nu \langle X^\dagger X \rangle^3 + \eta_\nu \langle (X^\dagger X)^2 \rangle \langle X^\dagger X \rangle + \kappa_\nu \langle (X^\dagger X)^3 \rangle + O(X^8)], \quad (5.47)$$

Nous pouvons alors identifier les mêmes puissances de X dans les expressions de Z_ν en terme des moments inverses (5.26) et en termes du lagrangien effectif à l'ordre dominant à partir de (5.42) et (5.47). Cela mène aux règles de somme:

$$\langle\langle \sigma_2 \rangle\rangle_\nu^{(N_f)} = V \left(\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu} + h \right) \quad (5.48)$$

$$\langle\langle (\sigma_2)^2 \rangle\rangle_\nu^{(N_f)} = 2V^2 \left(\frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu} + h \frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu} + \frac{h^2}{2} \right) \quad (5.49)$$

$$\langle\langle \sigma_4 \rangle\rangle_\nu^{(N_f)} = -2V^2 \frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu} \quad (5.50)$$

$$\langle\langle(\bar{\sigma}_2)^2\rangle\rangle_\nu^{(N_f)} = V^2 \left(2\frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu} - \left(\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu}\right)^2 \right) \quad (5.51)$$

$$\langle\langle(\bar{\sigma}_2)^3\rangle\rangle_\nu^{(N_f)} = V^3 \left(6\frac{\epsilon_\nu}{\alpha_\nu} - 6\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu} \frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu} + 2\left(\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu}\right)^3 \right) \quad (5.52)$$

$$\langle\langle\bar{\sigma}_2\sigma_4\rangle\rangle_\nu^{(N_f)} = V^3 \left(-2\frac{\eta_\nu}{\alpha_\nu} + 2\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu} \frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu} \right) \quad (5.53)$$

$$\langle\langle\sigma_6\rangle\rangle_\nu^{(N_f)} = 3V^3\kappa_\nu \quad (5.54)$$

Si nous connaissons $\alpha_\nu, \beta_\nu, \dots$ en terme des constantes de basse énergie de $\tilde{\mathcal{L}}_2$, (5.48)-(5.54) fournissent les règles de somme que nous cherchons. Le contreterme h qui refète la divergence ultraviolette de σ_2 doit être éliminé. Pour cela, nous considérons la fluctuation de σ_2 sur un secteur topologique: $\bar{\sigma}_2 = \sigma_2 - \langle\langle\sigma_2\rangle\rangle_\nu^{(N_f)}$, définie en Sec. 5.2.3.

Pour le secteur topologiquement trivial $\nu = 0$, le calcul est très simple, et suit la même logique que dans la phase $N_f > n_{\text{crit}}(N_c)$. On obtient les coefficients d'expansion (pour $b = \bar{b}$, $z = \bar{z}$, $a = \bar{a}$):

$$\alpha_0 = 1 \quad \beta_0 = \frac{1}{N_f}(y + b^2) \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{1}{N_f(N_f^2 - 1)} \\ &\times \left\{ N_f \left[\frac{b^4}{2} + 2b^2y + 2b^2z + y^2 + 2z^2 + 2a^2 \right] - 2a[b^2 + 2z] \right\} \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{1}{N_f(N_f^2 - 1)} \\ &\times \left\{ -\left[\frac{b^4}{2} + 2b^2z + 2b^2y + y^2 + 2z^2 + 2a^2 \right] + N_f \cdot 2a[b^2 + 2z] \right\} \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= \frac{1}{N_f(N_f^2 - 1)(N_f^2 - 4)} \\ &\times \left\{ 6(N_f^2 - 2) \right. \\ &\quad \times \left[\frac{b^6}{36} + b^4 \left(\frac{z}{3} + \frac{y}{4} \right) + b^2 \left(z^2 + \frac{y^2}{2} + yz \right) + \left(\frac{y^3}{6} + yz^2 \right) \right] \\ &\quad \left. + 2(N_f^2 + 2) [b^2 + y] a^2 - 12N_f \left[\frac{b^4}{6} + b^2 \left(\frac{y}{2} + z \right) + yz \right] a \right\} \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\eta_0 = \frac{1}{N_f(N_f^2 - 1)(N_f^2 - 4)} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ -18N_f \left[\frac{b^6}{36} + b^4 \left(\frac{z}{3} + \frac{y}{4} \right) + b^2 \left(z^2 + \frac{y^2}{2} + yz \right) + \left(\frac{y^3}{6} + yz^2 \right) \right] \right. \\
& \quad \left. -18N_f [b^2 + y] a^2 + 12(N_f^2 + 2) \left[\frac{b^4}{6} + b^2 \left(\frac{y}{2} + z \right) + yz \right] a \right\} \\
\kappa_0 &= \frac{1}{N_f(N_f^2 - 1)(N_f^2 - 4)} \\
& \quad \left\{ 24 \left[\frac{b^6}{36} + b^4 \left(\frac{z}{3} + \frac{y}{4} \right) + b^2 \left(z^2 + \frac{y^2}{2} + yz \right) + \left(\frac{y^3}{6} + yz^2 \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + 4(N_f^2 + 2) [b^2 + y] a^2 - 24N_f \left[\frac{b^4}{6} + b^2 \left(\frac{y}{2} + z \right) + yz \right] a \right\}
\end{aligned} \tag{5.60}$$

Avant de nous concentrer sur les règles de somme obtenues dans le secteur topologiquement trivial $\nu = 0$, nous allons esquisser la dérivation générale des coefficients d'expansion pour un nombre d'enroulement arbitraire.

5.3.2 Les secteurs topologiquement non-triviaux: $\nu \neq 0$

Commençons par le coefficient dominant α_ν . Indépendant de X , il peut être calculé pour $X = x \cdot 1$, où x est un nombre complexe. α_ν est alors donné par l'ordre dominant de I_ν en x (pas de puissance de x^*), et il dépend seulement de (b, z, a) . De plus, $\alpha_\nu(b, z, a)$ peut être déduit de $\alpha_\nu(b, 0, a)$ à l'aide des relations entre les dérivées (5.46). Le problème se ramène à calculer l'ordre dominant en x de l'intégrale de groupe:

$$I_\nu^\alpha = I_\nu(b, a; x \cdot 1) = \int_{U(N_f)} [dU] (\det U)^\nu \exp[bx \langle U^\dagger \rangle + ax^2 \langle U^{\dagger 2} \rangle]. \tag{5.61}$$

L'appendice D.1.1 décrit comment $\alpha_\nu(b, 0, a)$ est extrait de cette intégrale, pour aboutir au polynôme:

$$\alpha_\nu(b, z = 0, a) = \sum_{m=0 \dots \nu N_f / 2} b^{\nu N_f - 2m} a^m c_m, \tag{5.62}$$

où les $\{c_m\}$ sont de purs coefficients combinatoires. A l'aide de $\partial^2 \alpha_\nu / \partial b^2 = \partial \alpha_\nu / \partial z$, nous obtenons l'expression générale de α_ν :

$$\alpha_\nu(b, z, a) = \sum_{l+2m+2p=\nu N_f} b^l a^m z^p \frac{(l+2p)!}{l!p!} c_m. \tag{5.63}$$

Dans le cas limite d'un condensat de quark nul ($b = 0$), nous vérifions que α_ν (et donc I_ν) s'annule pour νN_f impair, en accord avec la règle de parité discutée dans la Sec. 5.2.3.

Nous obtenons les coefficients suivants en appliquant les opérateurs de dérivation (5.29) and (5.30) sur les deux représentations de I_ν : l'intégrale de groupe (5.41) et l'expansion en X (5.47). Nous connaissons déjà le résultat pour cette dernière, d'après l'étude de la phase $N_f \ll n_{\text{crit}}(N_c)$ en section 5.2.2:

$$\sum_a \frac{\partial}{\partial X_a} \frac{\partial}{\partial X_a^*} I_\nu = (\det X)^\nu \quad (5.64)$$

$$\times \left\{ \frac{N_f K}{2} \beta_\nu + \langle X^\dagger X \rangle [(N_f K + 1) \gamma_\nu + (N_f + K) \delta_\nu] + O(X^4) \right\},$$

et

$$\sum_{abcd} \langle t_a t_b t_c t_d \rangle \frac{\partial}{\partial X_a} \frac{\partial}{\partial X_b^*} \frac{\partial}{\partial X_c} \frac{\partial}{\partial X_d^*} I_\nu \quad (5.65)$$

$$= (\det X)^\nu \frac{N_f K}{8} \{ (N_f + K) \gamma_\nu + (N_f K + 1) \delta_\nu + O(X^2) \}.$$

L'opérateur à deux dérivées, appliqué sur l'intégrale de groupe (5.41) qui définit I_ν , donne:

$$\sum_a \frac{\partial}{\partial X_a} \frac{\partial}{\partial X_a^*} I_\nu = \left[\frac{N_f}{2} (y + b\bar{b}) + 2a\bar{a} \langle X^\dagger X \rangle \right.$$

$$+ (N_f z \bar{b} + a\bar{b} + \frac{N_f}{2} b y) \frac{\partial}{\partial b} + (N_f \bar{z} b + \bar{a}b + \frac{N_f}{2} \bar{b} y) \frac{\partial}{\partial \bar{b}}$$

$$+ (N_f z + a) y \frac{\partial}{\partial z} + (N_f \bar{z} + \bar{a}) y \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$\left. + (2N_f z \bar{z} + \frac{N_f}{2} y^2 + 2\bar{a}z + 2a\bar{z}) \frac{\partial}{\partial y} \right] I_\nu. \quad (5.66)$$

Nous pouvons alors remplacer I_ν par son expansion en X (5.47), et identifier le polynôme en X ainsi obtenu avec le membre de droite de l'équation (5.64). Quand nous identifions les coefficients de X^0 , nous obtenons β_ν en terme de α_ν et de ses dérivées:

$$\alpha'_\nu = \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial b}, \quad \dot{\alpha}_\nu = \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial a}, \quad \alpha''_\nu = \frac{\partial^2 \alpha_\nu}{\partial b^2} = \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial z}. \quad (5.67)$$

Les coefficients de $\langle X^\dagger X \rangle$ fournissent une égalité entre une combinaison linéaire de γ_ν et δ_ν , et des dérivées de α_ν et β_ν (ces dérivées peuvent d'ailleurs être reexprimées en fonction des seules dérivées de α_ν , puisque nous connaissons à présent la relation entre β_ν et α_ν).

Nous pouvons suivre le même raisonnement avec l'opérateur à quatre dérivées. En fait, quand nous l'appliquons à l'intégrale de groupe (5.41), nous désirons seulement connaître la plus basse puissance en X , afin de la comparer à (5.65). Les facteurs de plus haut degré, du type de $a\bar{a}\langle X^\dagger X \rangle$ dans (5.66), peuvent être ignorés. Nous obtenons:

$$\begin{aligned}
& \sum_{abcd} \langle t_a t_b t_c t_d \rangle \frac{\partial}{\partial X_a} \frac{\partial}{\partial X_b^*} \frac{\partial}{\partial X_c} \frac{\partial}{\partial X_d^*} I_\nu \\
&= \left\{ \frac{N_f}{8} \left[\frac{1}{2} b^2 \bar{b}^2 + b^2 (N_f \bar{a} + \bar{z}) + \bar{b}^2 (N_f a + z) + 2b\bar{b}y \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + y^2 + 2z\bar{z} + 2a\bar{a} + 2N_f(a\bar{z} + \bar{a}z) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{8} [b\bar{b}(N_f by + 2N_f \bar{b}z + 2\bar{b}a) + \bar{b}(6N_f yz + 4ay + 2N_f^2 ay) \right. \\
&\quad \left. + b(2N_f y^2 + 4N_f^2 \bar{a}z + 4N_f z\bar{z} + 4N_f a\bar{a} + 4a\bar{z}) \right] \frac{\partial}{\partial b} \\
&\quad + \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2} b^2 y^2 + \bar{b}^2 (2N_f z^2 + 4az) + b\bar{b}(4N_f yz + 4ay) \right. \\
&\quad \left. + y^2 (5N_f z + (N_f^2 + 4)a) + 4N_f^2 \bar{a}z^2 \right. \\
&\quad \left. + 8N_f a\bar{a}z + 4N_f z^2 \bar{z} + 4a^2 \bar{a} \right] \frac{\partial^2}{\partial b^2} \\
&\quad + \frac{1}{4} [2N_f \bar{b}yz^2 + N_f by^2 z + aby^2 + 4a\bar{b}yz] \frac{\partial^3}{\partial b^3} + \frac{1}{4} [N_f z + 2a] zy^2 \frac{\partial^4}{\partial b^4} \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} [\bar{b}^2 + 2\bar{z}] a^2 \frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{2} a^2 \bar{b}y \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} + \frac{1}{4} a^2 y^2 \frac{\partial^3}{\partial a \partial b^2} + O(X^2) \right\} I_\nu.
\end{aligned} \tag{5.68}$$

A nouveau, nous remplaçons I_ν par son expansion en X dans le membre de droite de cette équation. Nous conservons seulement le coefficient de X^0 et nous le comparons à (5.65), pour aboutir à une seconde égalité entre une combinaison linéaire de γ_ν et δ_ν , et des dérivées de α_ν . Les expressions ainsi obtenues sont énumérées dans l'appendice D.1.2, mais il semble difficile de les utiliser en toute généralité.

5.3.3 Le secteur topologiquement trivial: $\nu = 0$

A partir des coefficients d'expansion $\alpha_0, \beta_0 \dots$ de la section 5.3.1, nous obtenons des règles de somme pour les moments inverses de degré 4 and 6. Avec $\zeta = V\Sigma^2/\mathcal{A}$, $\bar{S} = \mathcal{Z}_S/\mathcal{A}$ et $\bar{P} = \mathcal{Z}_P/\mathcal{A}$, les règles de somme s'écrivent:

$$\langle\langle (\bar{\sigma}_2)^2 \rangle\rangle_0^{(N_f)} = \frac{V^2 \mathcal{A}^2}{16N_f^2(N_f^2 - 1)} \tag{5.69}$$

$$\begin{aligned} & \times \{ \zeta^2 + \zeta[4(2N_f^2 + 1)\bar{S} - 4\bar{P} - 4N_f] \\ & \quad + [4(2N_f^2 + 1)(\bar{S}^2 + \bar{P}^2) - 8\bar{S}\bar{P} - 8N_f(\bar{S} + \bar{P}) + 4N_f^2] \}, \\ \langle\langle \sigma_4 \rangle\rangle_0^{(N_f)} &= \frac{V^2 \mathcal{A}^2}{16N_f(N_f^2 - 1)} \end{aligned} \quad (5.70)$$

$$\begin{aligned} & \times \{ \zeta^2 + \zeta[12\bar{S} - 4\bar{P} - 4N_f] \\ & \quad + [12\bar{S}^2 + 12\bar{P}^2 - 8\bar{S}\bar{P} + 4 - 8N_f\bar{S} - 8N_f\bar{P}] \}, \\ \langle\langle \sigma_6 \rangle\rangle_0^{(N_f)} &= \frac{V^3 \mathcal{A}^3}{32N_f(N_f^2 - 1)(N_f^2 - 4)} \end{aligned} \quad (5.71)$$

$$\begin{aligned} & \times \{ \zeta^3 + \zeta^2[30\bar{S} - 6\bar{P} - 6N_f] \\ & \quad + \zeta[180\bar{S}^2 + 36\bar{P}^2 - 72\bar{S}\bar{P} - 72N_f\bar{S} + 6(N_f^2 + 2)] \\ & \quad + [120\bar{S}^3 - 120\bar{P}^3 + 72\bar{S}\bar{P}^2 - 72\bar{S}^2\bar{P} - 72N_f\bar{S}^2 \\ & \quad + 72N_f\bar{P}^2 + 12(N_f^2 + 2)\bar{S} - 12(N_f^2 + 2)\bar{P}] \}, \\ \langle\langle \sigma_4 \bar{\sigma}_2 \rangle\rangle_0^{(N_f)} &= \frac{V^3 \mathcal{A}^3}{16N_f^2(N_f^2 - 1)(N_f^2 - 4)} \end{aligned} \quad (5.72)$$

$$\begin{aligned} & \times \{ \zeta^3 + \zeta^2[2(2N_f^2 + 7)\bar{S} - 6\bar{P} - 6N_f] \\ & \quad + \zeta[36(N_f^2 + 1)\bar{S}^2 + 4(N_f^2 + 5)\bar{P}^2 - 8(N_f^2 + 5)\bar{S}\bar{P} \\ & \quad - 8N_f(N_f^2 + 5)\bar{S} + 4(2N_f^2 + 1)] \\ & \quad + [24(N_f^2 + 1)\bar{S}^3 - 24(N_f^2 + 1)\bar{P}^3 + 8(N_f^2 + 5)\bar{S}\bar{P}^2 \\ & \quad - 8(N_f^2 + 5)\bar{S}^2\bar{P} - 8N_f(N_f^2 + 5)\bar{S}^2 + 8N_f(N_f^2 + 5)\bar{P}^2 \\ & \quad + 8(2N_f^2 + 1)\bar{S} - 8(2N_f^2 + 1)\bar{P}] \}, \\ \langle\langle (\bar{\sigma}_2)^3 \rangle\rangle_0^{(N_f)} &= \frac{V^3 \mathcal{A}^3}{8N_f^3(N_f^2 - 1)(N_f^2 - 4)} \end{aligned} \quad (5.73)$$

$$\begin{aligned} & \times \{ \zeta^3 + \zeta^2[6(N_f^2 + 1)\bar{S} - 6\bar{P} - 6N_f] \\ & \quad + \zeta[6(2N_f^4 - N_f^2 + 2)\bar{S}^2 + 6(N_f^2 + 2)\bar{P}^2 \\ & \quad - 12(N_f^2 + 2)\bar{S}\bar{P} - 12N_f(N_f^2 + 2)\bar{S} + 9N_f^2] \\ & \quad + [4(2N_f^4 - N_f^2 + 2)\bar{S}^3 - 4(2N_f^4 - N_f^2 + 2)\bar{P}^3 \\ & \quad + 12(N_f^2 + 2)\bar{S}\bar{P}^2 - 12(N_f^2 + 2)\bar{S}^2\bar{P} \\ & \quad - 12N_f(N_f^2 + 2)\bar{S}^2 + 12N_f(N_f^2 + 2)\bar{P}^2 \\ & \quad + 18N_f^2\bar{S} - 18N_f^2\bar{P}] \}. \end{aligned}$$

La dépendance sur le nombre de saveurs sans masse ne se limite pas aux polynômes en N_f explicitement présents dans les formules précédentes, puisque Σ , \mathcal{Z}_S , \mathcal{Z}_P et \mathcal{A} sont des fonctions inconnues de N_f (cette dépendance n'apparaît pas ici afin d'alléger les expressions). Des singularités à $N_f = 1$ (pour

les moments en $1/\lambda^4$ et $1/\lambda^6$) et $N_f = 2$ (pour les moments en $1/\lambda^6$) apparaissent car certains coefficients $\alpha_\nu, \beta_\nu \dots$ de (5.47) ne sont alors plus indépendants, et nous pouvons seulement écrire des règles de somme (sans singularité) pour des différences entre les moments inverses de même degré, comme $(\bar{\sigma}_2)^2 - \sigma_4$ pour $N_f = 1$.

Remarquons que le paramètre d'échelle $\zeta = V\Sigma^2/\mathcal{A}$ et les rapports $\bar{S} = \mathcal{Z}_S/\mathcal{A}$ et $\bar{P} = \mathcal{Z}_P/\mathcal{A}$ sont invariants sous le groupe de renormalisation de QCD. Cette invariance apparaît également pour des rapports de moments inverses possédant le même degré d'homogénéité en λ :

$$R = \frac{\langle\langle\sigma_4\rangle\rangle_0}{\langle\langle(\bar{\sigma}_2)^2\rangle\rangle_0}, \quad S = \frac{\langle\langle(\bar{\sigma}_2)^3\rangle\rangle_0}{\langle\langle\sigma_6\rangle\rangle_0}, \quad T = \frac{\langle\langle\sigma_4\bar{\sigma}_2\rangle\rangle_0}{\langle\langle\sigma_6\rangle\rangle_0}, \quad U = \frac{\langle\langle\sigma_4\rangle\rangle_0^{3/2}}{\langle\langle\sigma_6\rangle\rangle_0}. \quad (5.74)$$

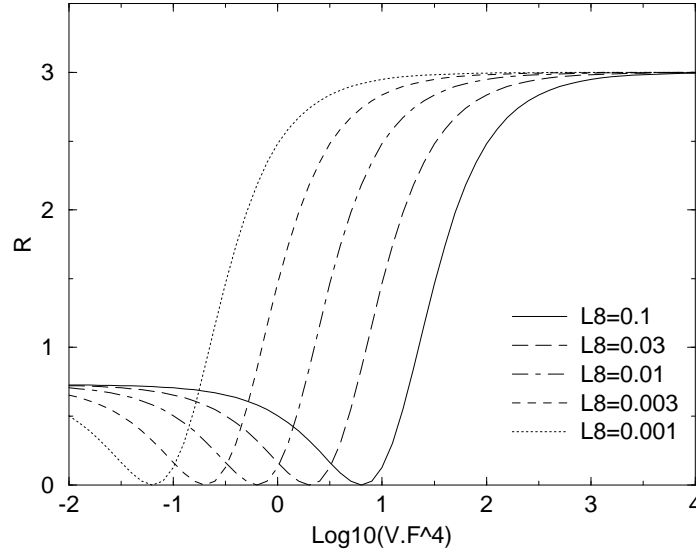


FIG. 5.1 – Variations de $R = \langle\langle\sigma_4\rangle\rangle_0 / \langle\langle(\bar{\sigma}_2)^2\rangle\rangle_0$ en fonction du volume, mesuré en unités physiques F_π^{-4} ($N_f = 3$ saveurs, $\mathcal{Z}_P/\mathcal{A} = -1/2$ et $\mathcal{Z}_S/\mathcal{A} = 1/6$). La variation de \hat{L}_8 redéfinit seulement la variable d'échelle ζ et décale globalement les courbes. L'annulation pour des volumes intermédiaires est commentée dans la section 5.3.4.

Nous pouvons tracer (Figs. 5.1 et 5.2) les variations de R en fonction du volume, mesuré en unités physiques F_π^{-4} ($F_\pi = 92.4$ MeV). La variable d'échelle est $\zeta = (F_\pi^4 V) / (16\hat{L}_8)$, tandis que le paramètre sans dimension

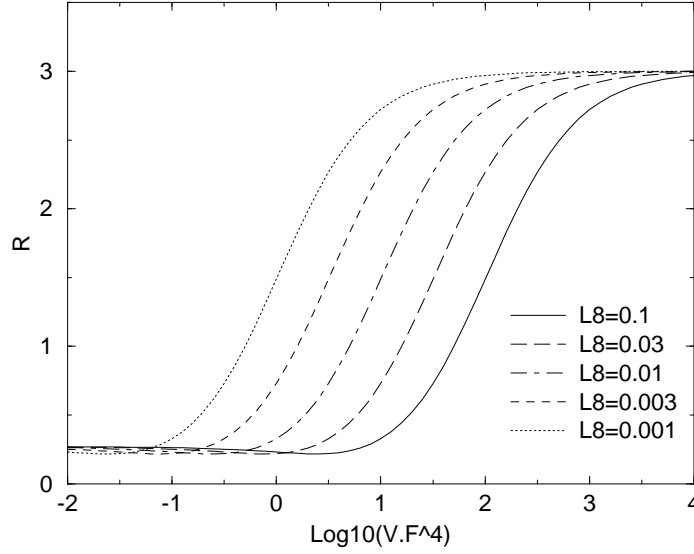


FIG. 5.2 – Variations de $R = \langle\langle\sigma_4\rangle\rangle_0 / \langle\langle(\bar{\sigma}_2)^2\rangle\rangle_0$ en fonction du volume, mesuré en unités physiques F_π^{-4} ($N_f = 3$ saveurs, $\mathcal{Z}_P/\mathcal{A} = -1/2$ et $\mathcal{Z}_S/\mathcal{A} = 1$).

\hat{L}_8 est $(F_\pi^4 \mathcal{A}) / (16 \Sigma^2)$ (pour $N_f = 3$, cela correspond essentiellement à la constante de basse énergie L_8 de $S\chi PT$ [6]). Une modification du condensat change \hat{L}_8 , et redéfinit les unités utilisées pour mesurer le volume: cela se réduit à un simple décalage des courbes (à droite si Σ diminue, à gauche s'il augmente).

La limite de volume infini reproduit les règles de somme de Leutwyler-Smilga ($R \rightarrow N_f$). En outre, puisque le paramètre d'échelle de volume est $\zeta = V \Sigma^2 / \mathcal{A}$, la limite $L \rightarrow 0$ correspond mathématiquement à un condensat nul pour les règles de somme: nous retrouvons les résultats de la section 5.2.3. Les règles de somme (5.69)-(5.73) peuvent être vues comme des interpolations entre ces deux régimes.

Les rapports R , S , T et U sont peu sensibles à \bar{P} (violation de la règle de Zweig dans le secteur pseudoscalaire), jusqu'à ce que nous atteignons de petits volumes où de grandes corrections dues aux ordres supérieurs sont attendues. Pour $N_f = 3$ saveurs, la valeur $\bar{P} = -1/2$ est privilégiée, car elle garantit la validité de la formule de Gell-Mann–Okubo [64], indépendamment de la taille de Σ (voir Sec. 3.6.1). D'un autre côté, il est intéressant de noter que certains rapports sont affectés par des variations de \bar{S} même pour des volumes intermédiaires. Par exemple, la dépendance du rapport S sur $\bar{S} =$

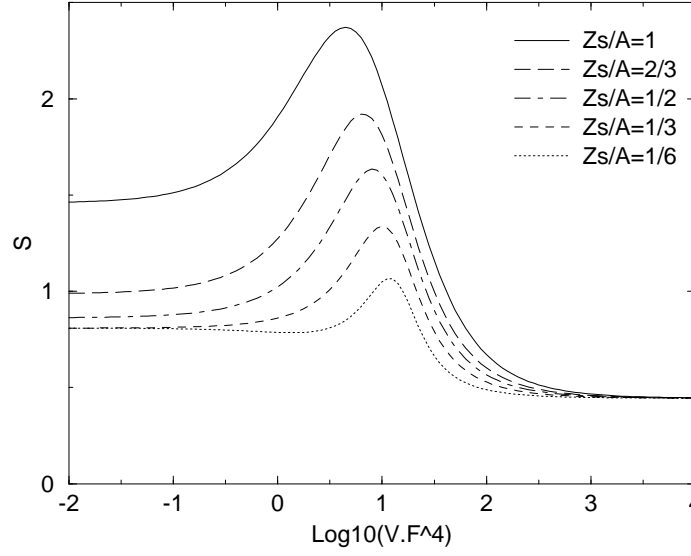


FIG. 5.3 – Variations de $S = \langle\langle\bar{\sigma}_2\rangle\rangle_0/\langle\langle\sigma_6\rangle\rangle_0$ en fonction du volume mesuré en unités physiques F_π^{-4} , pour différentes valeurs de $\bar{S} = \mathcal{Z}_S/\mathcal{A}$ ($N_f = 3$, $\hat{L}_8 = 0.1$, $\bar{P} = -1/2$). S est sensible à la variable \bar{S} même pour des volumes intermédiaires. Une valeur différente de \hat{L}_8 se ramènerait à un décalage global des courbes.

$\mathcal{Z}_S/\mathcal{A}$ est tracée sur la figure 5.3 (nous avons choisi $\hat{L}_8 = 0.1$, mais une autre valeur de \hat{L}_8 s'obtiendrait immédiatement en décalant la courbe).

Pour simplifier cette analyse, on peut s'intéresser à des combinaisons linéaires des moments inverses où la puissance dominante de V s'élimine. Ces combinaisons s'annulent donc dans le cas limite des règles de Leutwyler-Smilga (5.33)-(5.35):

$$N_f \langle\langle(\bar{\sigma}_2)^2\rangle\rangle_0^{(N_f)} - \langle\langle\sigma_4\rangle\rangle_0^{(N_f)} = \frac{V^2}{4N_f} \{2\mathcal{Z}_S \Sigma^2 V + [2\mathcal{Z}_S^2 + 2\mathcal{Z}_P^2 + \mathcal{A}]\} \quad (5.75)$$

$$N_f \langle\langle\sigma_4 \bar{\sigma}_2\rangle\rangle_0^{(N_f)} - 2 \langle\langle\sigma_6\rangle\rangle_0^{(N_f)} = \frac{V^3}{8N_f(N_f^2 - 1)} \times \{2\mathcal{Z}_S \Sigma^4 V^2 + [18\mathcal{Z}_S^2 + 2\mathcal{Z}_P^2 - 4\mathcal{Z}_S \mathcal{Z}_P - 4N_f \mathcal{Z}_S \mathcal{A} + \mathcal{A}^2] \Sigma^2 V + [12(\mathcal{Z}_S^3 - \mathcal{Z}_P^3) + 4\mathcal{Z}_S \mathcal{Z}_P (\mathcal{Z}_S - \mathcal{Z}_P) - 4N_f (\mathcal{Z}_S^2 - \mathcal{Z}_P^2) \mathcal{A} + 2(\mathcal{Z}_S - \mathcal{Z}_P) \mathcal{A}^2]\} \quad (5.76)$$

$$N_f \langle\langle (\bar{\sigma}_2)^3 \rangle\rangle_0^{(N_f)} - 2 \langle\langle \sigma_4 \bar{\sigma}_2 \rangle\rangle_0^{(N_f)} = \frac{V^3}{8N_f^2(N_f^2 - 1)} \quad (5.77)$$

$$\begin{aligned} & \times \{2\mathcal{Z}_S \Sigma^4 V^2 + [6(2N_f^2 + 1)\mathcal{Z}_S^2 + 2\mathcal{Z}_P^2 - 4\mathcal{Z}_S \mathcal{Z}_P - 4N_f \mathcal{Z}_S \mathcal{A} + \mathcal{A}^2] \Sigma^2 V \\ & + [4(2N_f^2 + 1)(\mathcal{Z}_S^3 - \mathcal{Z}_P^3) + 4\mathcal{Z}_S \mathcal{Z}_P (\mathcal{Z}_S - \mathcal{Z}_P) \\ & - 4N_f(\mathcal{Z}_S^2 - \mathcal{Z}_P^2) \mathcal{A} + 2(\mathcal{Z}_S - \mathcal{Z}_P) \mathcal{A}^2]\} \\ N_f^2 \langle\langle (\bar{\sigma}_2)^3 \rangle\rangle_0^{(N_f)} - 3N_f \langle\langle \sigma_4 \bar{\sigma}_2 \rangle\rangle_0^{(N_f)} + \langle\langle \sigma_6 \rangle\rangle_0^{(N_f)} & \quad (5.78) \\ & = \frac{V^3}{2N_f} [3\mathcal{Z}_S^2 V \Sigma^2 + 2(\mathcal{Z}_S^3 - \mathcal{Z}_P^3)] \end{aligned}$$

Le comportement à grand volume de ces combinaisons est particulièrement sensible au condensat Σ et à ses fluctuations décrites par \mathcal{Z}_S (violation de la règle de Zweig dans le secteur scalaire). Tous deux devraient justement être fortement affectés par la proximité du point critique.

5.3.4 Conditions de positivité

$(\bar{\sigma}_2)^2$, σ_4 et σ_6 sont par définition positifs. Ce doit donc être aussi le cas pour leurs moyennes sur un secteur topologique quelconque. Pour $N_f \ll n_{\text{crit}}(N_c)$, cette positivité est trivialement satisfaite par les comportements asymptotiques prédits par les règles de Leutwyler-Smilga (5.33)-(5.35).

Quand N_f est proche (et en-dessous) de $n_{\text{crit}}(N_c)$, la dépendance en volume des moments inverses positifs s'exprime à l'aide des règles de somme de la section précédente. Ces dernières étaient dérivées à l'ordre dominant, pour $\nu = 0$, et sont des fonctions de ζ , $\bar{S} = \mathcal{Z}_S/A$ et $\bar{P} = \mathcal{Z}_P/A$. La positivité de $\langle\langle (\bar{\sigma}_2)^2 \rangle\rangle_0^{(N_f)}$, $\langle\langle \sigma_4 \rangle\rangle_0^{(N_f)}$ et $\langle\langle \sigma_6 \rangle\rangle_0^{(N_f)}$ contraint donc les constantes de basse énergie de $\tilde{\mathcal{L}}_2$.

Il est instructif de tracer dans le plan (\bar{S}, \bar{P}) le domaine où chacune de ces règles de somme est positive pour toute valeur du paramètre d'échelle $\zeta = V\Sigma^2/A$. Cela revient à exiger la positivité d'un polynôme de deuxième ou de troisième degré en ζ , dont les coefficients sont des fonctions de \bar{S} et \bar{P} (et N_f). Pour un nombre donné de saveurs, cette procédure exclut certaines valeurs de (\bar{S}, \bar{P}) , qui forment les domaines hachurés sur les figures 5.4-5.7. Si $\langle\langle (\bar{\sigma}_2)^2 \rangle\rangle_0^{(N_f)}$ ne contraint pas beaucoup \bar{S} et \bar{P} (Fig. 5.4), la positivité de $\langle\langle \sigma_4 \rangle\rangle_0^{(N_f)}$ (Fig. 5.5) et $\langle\langle \sigma_6 \rangle\rangle_0^{(N_f)}$ (Fig. 5.6) conduit à des contraintes plus sévères. Si N_f augmente, les domaines d'exclusions s'élargissent, comme le montre Fig. 5.7, à comparer à Fig. 5.5. Si nous supposons que $N_f = 3$ est déjà proche du point critique $n_{\text{crit}}(N_c)$, et si nous fixons $\bar{P} = -1/2$ à partir de la formule de Gell-Mann–Okubo, la positivité de $\langle\langle \sigma_4 \rangle\rangle_0^{(N_f)}$ impose $\bar{S} \geq 1/6$. Cela explique l'annulation de R sur la figure 5.1, où les paramètres \bar{S} et \bar{P} ont

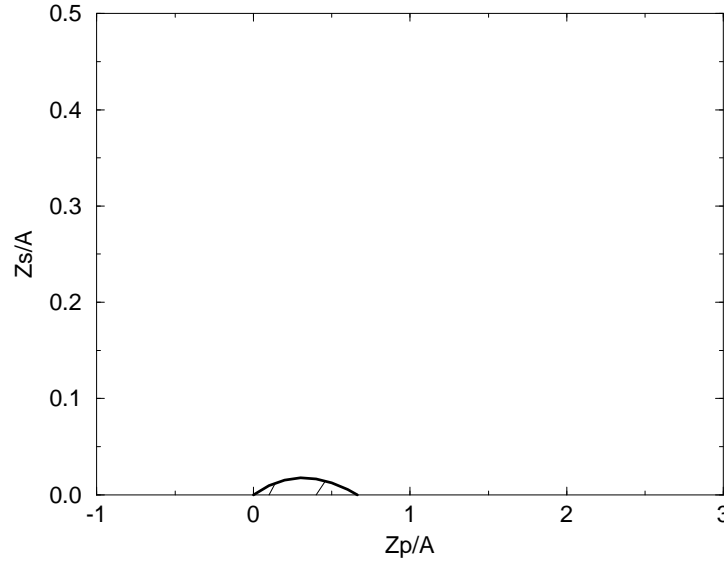


FIG. 5.4 – Valeurs de $(Z_S/\mathcal{A}, Z_P/\mathcal{A})$ pour lesquelles la règle de somme (5.69) pour $\langle\langle(\bar{\sigma}_2)^2\rangle\rangle_0^{(N_f=3)}$ est positive pour toute valeur de la variable d'échelle $\zeta = V\Sigma^2/\mathcal{A}$ (la zone interdite est hachurée).

été choisis à la frontière du domaine de positivité de $\langle\langle\sigma_4\rangle\rangle_0^{(N_f)}$. Ces domaines de positivité sont décrits plus précisément dans l'Appendice D.2.

Evidemment, ces domaines sont obtenus en considérant ces règles de somme à l'ordre dominant: leur frontière est altérée par des corrections sous-dominantes, qui peuvent devenir importantes à petit volume. De plus, les bosons de Goldstone ne dominant plus la fonction de partition quand la taille de la boîte devient plus petite que $1/\Lambda_{QCD}$. En résumé, nous sommes trop exigeants quand nous demandons que l'ordre dominant des règles de somme soit positif pour tout ζ . Le domaine ainsi obtenu est seulement une approximation de la véritable région autorisée dans le plan (\bar{S}, \bar{P}) .

De plus, ces domaines de positivité sont pertinents seulement pour $N_f \lesssim n_{\text{crit}}(N_c)$. Au-dessus de la transition de phase, $\langle\langle(\bar{\sigma}_2)^2\rangle\rangle_0^{(N_f)}$, $\langle\langle\sigma_4\rangle\rangle_0^{(N_f)}$ et $\langle\langle\sigma_6\rangle\rangle_0^{(N_f)}$ sont encore positifs, mais leur comportement à grand volume est relié d'une manière différente aux constantes de basse énergie du lagrangien effectif, comme décrit en Sec. 5.2.3. Les conditions de positivité provenant du comportement asymptotique de $\langle\langle(\bar{\sigma}_2)^2\rangle\rangle_0^{(N_f)}$ et $\langle\langle\sigma_6\rangle\rangle_0^{(N_f)}$ sont satisfaits automatiquement par \bar{S} et \bar{P} . La seule relation non-triviale provient de la règle de

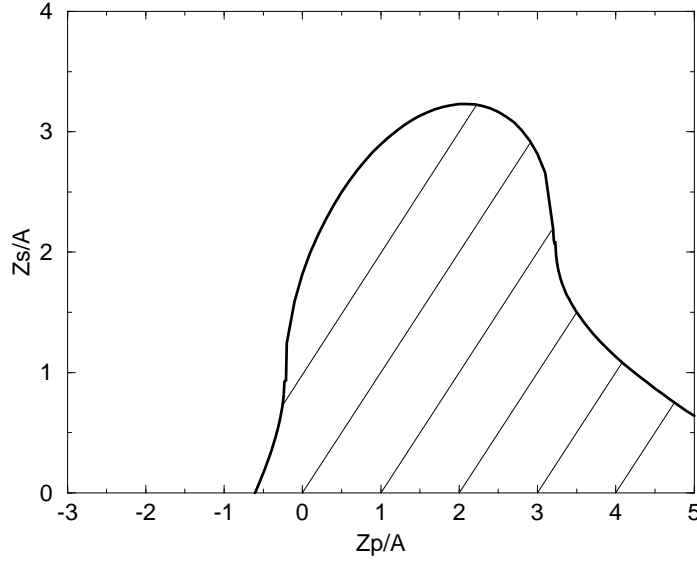


FIG. 5.5 – Valeurs de $(Z_S/A, Z_P/A)$ pour lesquelles la règle de somme (5.70) pour $\langle\langle\sigma_4\rangle\rangle_0^{(N_f=3)}$ est positive pour toute valeur de la variable d'échelle $\zeta = V\Sigma^2/A$ (la zone interdite est hachurée).

somme (5.38) pour $\langle\langle\sigma_4\rangle\rangle_0^{(N_f)}$ et s'écrit:

$$(\bar{S} + \bar{P} - N_f)^2 + 2(\bar{S} - \bar{P})^2 \geq N_f^2 - 1. \quad (5.79)$$

Pour obtenir cette relation, nous exigeons que la limite à volume infini de $\langle\langle\sigma_4\rangle\rangle_0^{(N_f)}$ soit positive. Cette limite est prédite par la règle de somme (5.38) à l'ordre dominant. Les corrections sous-dominantes à cette règle de somme tendent vers 0 quand $L \rightarrow \infty$ et elles n'affectent donc pas (5.79). Contrairement aux conditions de positivité précédentes, obtenues juste en-dessous du point critique, (5.79) est donc exact pour $N_f > n_{\text{crit}}(N_c)$ (tant que la symétrie chirale n'est pas restaurée).

5.4 Corrections sous-dominantes

Cette section est consacrée aux premières corrections sous-dominantes (NLO – next-to-leading-order) aux règles de somme. Dans les deux phases, elles se comportent comme $1/L^2$ par rapport à l'ordre dominant (LO – leading order) considéré jusqu'à présent.

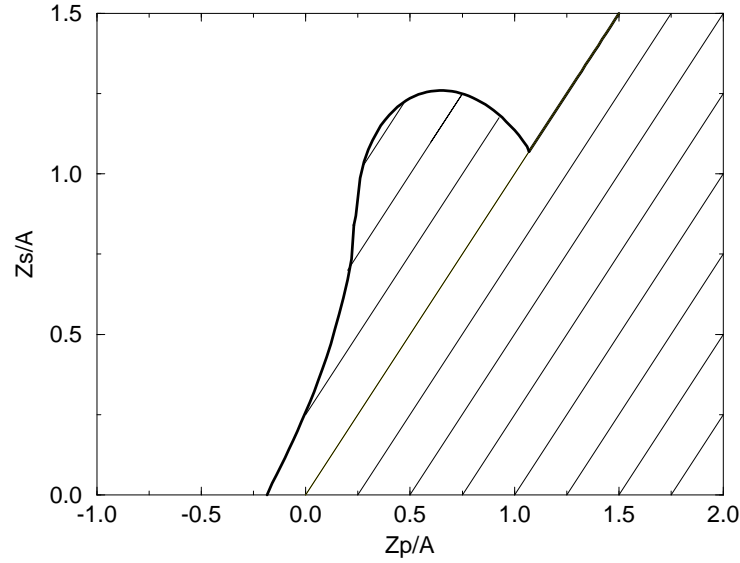


FIG. 5.6 – Valeurs de $(Z_S/A, Z_P/A)$ pour lesquelles la règle de somme (5.71) pour $\langle\langle\sigma_6\rangle\rangle_0^{(N_f=3)}$ est positive pour toute valeur de la variable d'échelle $\zeta = V\Sigma^2/A$ (la zone interdite est hachurée).

5.4.1 $N_f \ll n_{\text{crit}}(N_c)$

Les règles de somme de Leutwyler-Smilga étaient obtenues à l'ordre dominant du lagrangien effectif \mathcal{L}_2 dans le comptage standard, en se restreignant aux modes d'impulsion nulle. Les corrections sous-dominantes sont *a priori* de deux types: les modes d'impulsion non nulle (présent déjà dans \mathcal{L}_2), et les modes d'impulsions nulle (en commençant au NLO \mathcal{L}_4). Les premières corrections sous-dominantes s'avèrent être d'ordre $1/L^2$, et elles proviennent des modes d'impulsion non nulle dans \mathcal{L}_2 . Ces corrections peuvent être exprimées comme une renormalisation (dépendante du volume) du condensat de quarks⁴ dans les règles de somme (5.33)-(5.35).

Le second type de corrections sous-dominantes vient des modes d'impulsion nulle qui contribuent à \mathcal{L}_4 , quadratique en masse de quarks. Ce lagrangien contient entre autres le contreterme $\langle M^\dagger M \rangle$ qui correspond à la divergence quadratique de σ_2 . Puisque la règle de comptage dans cette phase est $M \sim 1/V$, ces termes quadratiques sont supprimés par un facteur $1/L^4$

4. Ce résultat peut être rapproché de l'analyse effectuée dans [92] au sujet des effets de taille finie dans la description effective d'une symétrie $O(N)$ spontanément brisée.

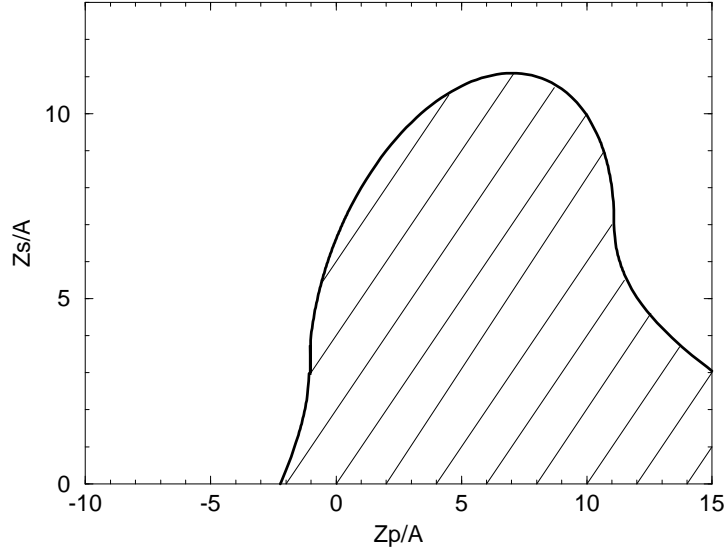


FIG. 5.7 – Valeurs de $(Z_S/A, Z_P/A)$ pour lesquelles la règle de somme (5.70) pour $\langle\langle\sigma_4\rangle\rangle_0^{(N_f=10)}$ est positive pour toute valeur de la variable d'échelle $\zeta = V\Sigma^2/A$ (la zone interdite est hachurée).

par rapport au terme linéaire dans \mathcal{L}_2 . Par conséquent, ces corrections sont NNLO (next-to-next-to-leading order) et ne seront pas discutées ici.

Les modes d'impulsion non nulle apparaissent quand on décompose les champs des bosons de Goldstone de Sec. 5.2.1:

$$U(x) = U_0 U_1(x) = U_0 \exp \left(i \sum_{a=1}^{N_f^2-1} \xi^a(x) t_a / F \right) \quad (5.80)$$

$$\xi^a(x) = \sum_{n \neq 0} \phi_n^a \exp \left(i \frac{2\pi}{L} n \cdot x \right), \quad (5.81)$$

où n_μ est un quadrivecteur de composantes entières ($n \neq 0$ signifie $\sum_\mu |n_\mu| \neq 0$). L'unitarité de $U_1(x)$ implique $\phi_{-n}^a = (\phi_n^a)^*$. Les fluctuations des modes d'impulsion non nulle sont petites, ce qui donne le comptage $\xi \sim \phi \sim \partial \sim 1/L$. La contribution dominante des modes d'impulsion non nulle est $\partial_\mu \xi \partial_\mu \xi$ et vient du terme cinétique de \mathcal{L}_2 . Il est compté avec la même puissance que le terme dominant des modes d'impulsion nulle (5.28), mais il peut être directement intégré et contribue seulement à l'énergie du vide [91]. A l'ordre

dominant, les modes d'impulsion nulle sont bien les seuls degrés de liberté pertinents.

Au NLO, les corrections engendrées par les modes d'impulsion non nulle sont dues aux termes $\partial^2 \xi^4$ et $M \xi^2$. Elles sont seulement supprimées par un facteur $1/L^2$ par rapport à l'ordre dominant $L^4 M$. La fonction de partition (5.21) jusqu'au NLO est donc:

$$Z_\nu = \mathcal{D}' \int_{\mathbf{U}(N_f)} [d\tilde{U}_0] (\det \tilde{U}_0)^\nu e^{-\mathcal{L}_{\text{eff}}(\tilde{U}_0, X)} \int \prod_{n>0,a} d\phi_n^a d(\phi_n^a)^* \quad (5.82)$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{L^4}{4} \sum_{n \neq 0,a,b} (\phi_n^a)^* \left[\left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \frac{n^2}{2} \delta_{ab} + Q_{ab} \right] \phi_n^b - T_{4\phi} + O(L^{-4}) \right\},$$

où la condition $n > 0$ signifie: $n_0 > 0$, ou $(n_0 = 0, n_1 > 0)$, ou $(n_0 = n_1 = 0, n_2 > 0)$, ou $(n_0 = n_1 = n_2 = 0, n_3 > 0)$. La matrice $(N_f^2 - 1) \times (N_f^2 - 1)$ suivante intervient:

$$Q_{ab} = \frac{\Sigma}{2F^2} \langle (t_a t_b + t_b t_a) (\tilde{U}_0^\dagger M + M^\dagger \tilde{U}_0) \rangle. \quad (5.83)$$

$T_{4\phi}$ est le terme quadratique:

$$T_{4\phi} = \frac{2L^2 \pi^2}{3F^2} \sum_{abcd, npqr \neq 0} \phi_n^a \phi_p^b \phi_q^c \phi_r^d n \cdot (q - p) \langle t_a t_b t_c t_d \rangle. \quad (5.84)$$

Dans l'intégrale sur les modes d'impulsion non nulle de (5.82), ces termes sont supprimés par un facteur $1/L^2$ par rapport au terme cinétique.

Commençons par le terme $T_{4\phi}$, qui ne contient ni la matrice de masses de quarks, ni la matrice des modes d'impulsion nulle \tilde{U}_0 . Nous pouvons le traiter perturbativement afin d'écrire une expansion en puissance de $1/L$:

$$\int \prod_{n>0,a} d\phi_n^a d(\phi_n^a)^* \quad (5.85)$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{L^4}{4} \sum_{n \neq 0,a,b} (\phi_n^a)^* \left[\left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \frac{n^2}{2} \delta_{ab} + Q_{ab} \right] \phi_n^b \right\} (1 - T_{4\phi} + \dots).$$

Nous devrions à présent appliquer le théorème de Wick et contracter les champs ϕ dans $T_{4\phi}$. Nous utiliserions alors le propagateur obtenu à partir du terme cinétique et du terme de "masse" Q_{ab} , ce dernier étant supprimé par un facteur $1/L^2$ par rapport au premier. Mais nous voulons seulement le premier ordre des corrections provenant des tadpoles de $T_{4\phi}$. Puisque cette correction est déjà supprimée par un facteur $1/L^2$ par rapport à l'ordre dominant de la

fonction de partition, elle peut être calculée avec des propagateurs restreints au terme cinétique (Q_{ab} induirait des corrections d'ordre $1/L^4$). Au NLO, la contribution de $T_{4\phi}$ ne fait donc intervenir ni M , ni \tilde{U}_0 (qui apparaissent seulement dans Q_{ab}): elle n'est qu'un terme global, dépendant de L , qui peut être factorisé, et éliminé en redéfinissant la constante de normalisation \mathcal{D}' .

Dès lors, les corrections en $1/L^2$ proviennent seulement du terme de “masse” Q_{ab} pour les modes d'impulsion non nulle. La fonction de partition restreinte à un secteur topologique donné s'écrit donc:

$$Z_\nu = \mathcal{D}'' \int_{\text{U}(N_f)} [d\tilde{U}_0] (\det \tilde{U}_0)^\nu \exp[-\mathcal{L}_{\text{eff}}(\tilde{U}_0, X)] \int \prod_{n>0,a} d\phi_n^a d(\phi_n^a)^* \quad (5.86)$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{L^4}{2} \sum_{n>0,a,b} (\phi_n^a)^* \left[\frac{1}{2} n^2 \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \delta_{ab} + Q_{ab} \right] \phi_n^b + O(L^{-4}) \right\}$$

L'intégrale gaussienne sur $\{\phi^n\}$ peut être calculée:

$$\mathcal{N} \prod_{n \neq 0} \exp \left[-\frac{L^2}{4\pi^2 n^2} \text{Tr } Q \right] = \mathcal{N} \exp \left[-\frac{L^2}{4\pi^2} \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right) \text{Tr } Q \right], \quad (5.87)$$

où \mathcal{N} est un facteur de normalisation indépendant de M . La trace de Q sur $a, b = 1 \dots N_f^2 - 1$ donne:

$$\text{Tr } Q = \frac{N_f^2 - 1}{2N_f} \frac{\Sigma}{F^2} \langle M \tilde{U}_0^\dagger + \tilde{U}_0 M^\dagger \rangle. \quad (5.88)$$

L'intégration sur les modes d'impulsion non nulle aboutit à la renormalisation:

$$\Sigma(N_f) \rightarrow \Sigma(N_f) \left(1 + g \frac{N_f^2 - 1}{2N_f} \right), \quad g = \frac{v}{2\pi^2 F^2 L^2}, \quad v = \sum' \frac{1}{n^2}. \quad (5.89)$$

Si nous incluons le premier ordre des corrections sous-dominantes, les règles de somme (5.33)-(5.35) restent donc valables, à condition de renormaliser dans ces expressions les paramètres du lagrangien effectif. Cette renormalisation introduit une dépendance additionnelle en $1/L^2$ qui est reliée au schéma de régularisation. Dans la régularisation dimensionnelle introduite par Hasenfratz et Leutwyler, [92], la somme divergente v devient $-4\pi^2 \beta_1$, où β_1 est un “coefficient de forme” relié à la dimension et la géométrie de l'espace-temps. Pour un tore quadri-dimensionnel, $\beta_1 = 0.1405$ (voir App. D.3 pour des commentaires plus détaillés).

Dans ce cas, les premières corrections sous-dominantes aux équations (5.33)-(5.35) se ramènent à la renormalisation:

$$\Sigma(N_f) \rightarrow \Sigma_c(N_f) = \Sigma(N_f) \left(1 - \frac{N_f^2 - 1}{N_f} \cdot \frac{\beta_1}{F^2 L^2} \right). \quad (5.90)$$

Par exemple, la correction relative $(\Sigma - \Sigma_c)/\Sigma$ reste plus petite que α si la taille de la boîte est plus grande que:

$$L_{\min} = \frac{1}{F} \sqrt{\frac{N_f^2 - 1}{N_f} \frac{\beta_1}{\alpha}}, \quad (5.91)$$

de sorte que, pour $N_f = 3$ saveurs, la renormalisation de Σ dans les règles de somme mène à une correction plus petite que 10% si la longueur de la boîte dépasse $1.9 \cdot F$ (en régularisation dimensionnelle).

5.4.2 Près du point critique

Comme dans le cas précédent, deux sources de corrections sous-dominantes doivent être prises en compte: les modes d'impulsion non nulle de $\tilde{\mathcal{L}}_2$, Eq. (3.35), et les modes d'impulsion nulle dans le lagrangien NLO $\tilde{\mathcal{L}}_3$ [7]:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_3^{(N_f)} = \frac{1}{4} \{ & \mathcal{X}(N_f) \langle \partial_\mu U^\dagger \partial_\mu U (M^\dagger U + U^\dagger M) \rangle \\ & + \tilde{\mathcal{X}}(N_f) \langle \partial_\mu U^\dagger \partial_\mu U \rangle \langle M^\dagger U + U^\dagger M \rangle \\ & - \mathcal{R}_1(N_f) \langle (M^\dagger U)^3 + (U^\dagger M)^3 \rangle \\ & - \mathcal{R}_2(N_f) \langle (M^\dagger U + U^\dagger M) M^\dagger M \rangle \\ & - \mathcal{R}_3(N_f) \langle M^\dagger U - U^\dagger M \rangle \langle (M^\dagger U)^2 - (U^\dagger M)^2 \rangle \\ & - \mathcal{R}_4(N_f) \langle (M^\dagger U)^2 + (U^\dagger M)^2 \rangle \langle M^\dagger U + U^\dagger M \rangle \\ & - \mathcal{R}_5(N_f) \langle M^\dagger M \rangle \langle M^\dagger U + U^\dagger M \rangle \\ & - \mathcal{R}_6(N_f) \langle M^\dagger U - U^\dagger M \rangle^2 \langle M^\dagger U + U^\dagger M \rangle \\ & - \mathcal{R}_7(N_f) \langle M^\dagger U + U^\dagger M \rangle^3 \}, \end{aligned} \quad (5.92)$$

avec $\mathcal{X} = F^2 \xi$, $\tilde{\mathcal{X}} = F^2 \tilde{\xi}$ et $\mathcal{R}_i = F^2 \rho_i$. Puisque le comptage est ici $ML^2 \sim 1$, les deux types de correction doivent contribuer au NLO $O(1/L^2)$, et peuvent affecter la dépendance en volume (quadratique ou cubique) des règles de somme précédemment dérivées.

Les modes d'impulsion non nulle sont explicitement définis par (5.81). Comme dans le comptage standard, leur terme dominant est le terme cinétique $\partial_\mu \xi \partial_\mu \xi$, qui est compté comme $O(1/L^4)$. Sa contribution (à l'ordre

dominant) se réduit à une constante globale qui redéfinit la normalisation de la fonction de partition.

Les contributions NLO des modes d'impulsion non nulle sont de la forme $B^a M^b \partial^c \xi^d$, avec $2a + 2b + c + d = 6$, c et d pairs, et $c \leq d$. Les termes envisageables sont $BM\xi^2$, $M^2\xi^2$ et $\partial^2\xi^4$ de $\tilde{\mathcal{L}}_2$, et $M\partial^2\xi^2$ de $\tilde{\mathcal{L}}_3$. Au NLO, l'intégrale de chemin devient:

$$\begin{aligned} Z_\nu = \mathcal{D}' \int_{\text{U}(N_f)} [d\tilde{U}_0] (\det \tilde{U}_0)^\nu \exp(-\mathcal{L}_{\text{eff}}(\tilde{U}_0, X)) \int \prod_{n>0,a} d\phi_n^a d(\phi_n^a)^* \\ \times \exp \left\{ -\frac{L^4}{2} \sum_{n>0,a,b} (\phi_n^a)^* \left[n^2 \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \delta_{ab} + \tilde{P}_{ab} \right) + \tilde{Q}_{ab} \right] \phi_n^b \right. \\ \left. -T_{4\phi} + O\left(\frac{1}{L^4}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.93)$$

avec les matrices $(N_f^2 - 1) \times (N_f^2 - 1)$:

$$\tilde{P}_{ab} = \frac{1}{2F^2} \left[\mathcal{X} \langle \{t_a, t_b\} (\tilde{U}_0^\dagger M + M^\dagger \tilde{U}_0) \rangle + \tilde{\mathcal{X}} \delta_{ab} \langle \tilde{U}_0^\dagger M + M^\dagger \tilde{U}_0 \rangle \right], \quad (5.94)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{ab} = \frac{1}{F^2} \left[\frac{\Sigma}{2} \langle (t_a t_b + t_b t_a) (\tilde{U}_0^\dagger M + M^\dagger \tilde{U}_0) \rangle \right. \\ + \mathcal{A} \langle t_a \tilde{U}_0^\dagger M t_b \tilde{U}_0^\dagger M + t_a M^\dagger \tilde{U}_0 t_b M^\dagger \tilde{U}_0 \rangle \\ + \mathcal{Z}_S \langle t_a (\tilde{U}_0^\dagger M - M^\dagger \tilde{U}_0) \rangle \langle t_b (\tilde{U}_0^\dagger M - M^\dagger \tilde{U}_0) \rangle \\ \left. + \mathcal{Z}_P \langle t_a (\tilde{U}_0^\dagger M + M^\dagger \tilde{U}_0) \rangle \langle t_b (\tilde{U}_0^\dagger M + M^\dagger \tilde{U}_0) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Le terme quadratique $T_{4\phi}$ est identique au cas standard (5.84) et provient du terme cinétique de $\tilde{\mathcal{L}}_2$, tandis que \tilde{P} vient de $\tilde{\mathcal{L}}_3$ et \tilde{Q} des termes sans dérivées de $\tilde{\mathcal{L}}_2$. Dans Eq. (5.93), les contributions de ces trois termes sont supprimés par un facteur $1/L^2$ par rapport au terme cinétique: $\pi^2 L^2 \sum_{n>0,a} n^2 |\phi_n^a|^2$.

Pour les mêmes raisons que dans la section précédente, l'intégration de $T_{4\phi}$ engendre à cet ordre un terme indépendant de M et \tilde{U}_0 , qui redéfinit simplement la constant de normalisation globale \mathcal{D}' . Au NLO, la fonction de partition pour un nombre d'enroulement donné s'écrit:

$$\begin{aligned} Z_\nu = \mathcal{D}'' \int_{\text{U}(N_f)} [d\tilde{U}_0] (\det \tilde{U}_0)^\nu \exp(-\mathcal{L}_{\text{eff}}(\tilde{U}_0, X)) \int \prod_{n>0,a} d\phi_n^a d(\phi_n^a)^* \\ \times \exp \left\{ -\frac{L^4}{2} \sum_{n>0,a,b} (\phi_n^a)^* \left[\frac{1}{2} n^2 \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (\delta_{ab} + 2\tilde{P}_{ab}) + \tilde{Q}_{ab} \right] \phi_n^b \right\}, \end{aligned} \quad (5.96)$$

ce qui donne après l'intégration sur ϕ :

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \prod_{n \neq 0} \exp \left[-\text{Tr } \tilde{P} - \frac{L^2}{4\pi^2 n^2} \text{Tr } \tilde{Q} \right] \\ = \mathcal{N} \exp \left[- \left(\sum_{n \neq 0} 1 \right) \text{Tr } \tilde{P} - \frac{L^2}{4\pi^2} \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right) \text{Tr } \tilde{Q} \right], \end{aligned} \quad (5.97)$$

où \mathcal{N} est un facteur de normalisation indépendant de M et de \tilde{U}_0 . Les traces sur les indices $a, b = 1 \dots N_f^2 - 1$ donnent:

$$\text{Tr } \tilde{P} = \frac{1}{F^2 L^2} \frac{N_f^2 - 1}{2N_f} (\mathcal{X} + N_f \tilde{\mathcal{X}}) \langle X \tilde{U}_0^\dagger + \tilde{U}_0 X^\dagger \rangle \quad (5.98)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr } \tilde{Q} = \frac{1}{2F^2 L^4} \left[\Sigma L^2 \frac{N_f^2 - 1}{N_f} \langle X \tilde{U}_0^\dagger + \tilde{U}_0 X^\dagger \rangle \right. \\ + \left(\mathcal{A} - \frac{\mathcal{Z}_S + \mathcal{Z}_P}{N_f} \right) \left(\langle X \tilde{U}_0^\dagger \rangle^2 + \langle \tilde{U}_0 X^\dagger \rangle^2 \right) \\ + \left(\mathcal{Z}_S + \mathcal{Z}_P - \frac{\mathcal{A}}{N} \right) \langle (X \tilde{U}_0^\dagger)^2 + (\tilde{U}_0 X^\dagger)^2 \rangle \\ \left. + \frac{2(\mathcal{Z}_S - \mathcal{Z}_P)}{N_f} \langle X \tilde{U}_0^\dagger \rangle \langle X^\dagger \tilde{U}_0 \rangle - 2(\mathcal{Z}_S - \mathcal{Z}_P) \langle X^\dagger X \rangle \right], \end{aligned} \quad (5.99)$$

L'intégration sur les modes d'impulsion non nulle aboutit à un terme possédant la même structure que $\tilde{\mathcal{L}}_2$. Il aboutit donc au sein des règles de somme à une renormalisation des paramètres du lagrangien:

$$\Sigma(N_f) \rightarrow \Sigma(N_f) + g \frac{N_f^2 - 1}{2N_f} \Sigma(N_f) \quad (5.100)$$

$$+ \frac{2u}{F^2 V} \frac{N_f^2 - 1}{2N_f} [\mathcal{X}(N_f) + N_f \tilde{\mathcal{X}}(N_f)],$$

$$\mathcal{A}(N_f) \rightarrow \mathcal{A}(N_f) + g \left[\mathcal{Z}_S(N_f) + \mathcal{Z}_P(N_f) - \frac{\mathcal{A}(N_f)}{N_f} \right], \quad (5.101)$$

$$\mathcal{Z}_S(N_f) \rightarrow \mathcal{Z}_S(N_f) + g \left[\frac{\mathcal{A}(N_f)}{2} - \frac{\mathcal{Z}_P(N_f)}{N_f} \right], \quad (5.102)$$

$$\mathcal{Z}_P(N_f) \rightarrow \mathcal{Z}_P(N_f) + g \left[\frac{\mathcal{A}(N_f)}{2} - \frac{\mathcal{Z}_S(N_f)}{N_f} \right], \quad (5.103)$$

$$\mathcal{H}(N_f) \rightarrow \mathcal{H}(N_f) - g \cdot 2[\mathcal{Z}_S(N_f) - \mathcal{Z}_P(N_f)], \quad (5.104)$$

avec les sommes nécessitant une régularisation:

$$g = \frac{v}{2\pi^2 F^2 L^2}, \quad v = \sum' \frac{1}{n^2}, \quad u = \sum' 1. \quad (5.105)$$

Dans le cas de régularisation dimensionnelle, nous obtenons $g = -2\beta_1/F^2 L^2$ et $u = 0$ (voir l'appendice D.3).

Avec le comptage $\Sigma L^2 \sim ML^2 \sim 1$, les corrections NLO proviennent aussi des modes d'impulsion nulle dans $\tilde{\mathcal{L}}_3$: elles contiennent donc les constantes de basse énergie \mathcal{R}_i . Si nous considérons le secteur topologique $\nu = 0$, les corrections qui en résultent sont assez faciles à calculer. Quand nous développons Z_0 (restreint aux modes d'impulsion nulle) comme un polynôme en X , les intégrales contenant des puissances différentes de U et U^\dagger sont nulles. En particulier, les termes issus de $\tilde{\mathcal{L}}_3$ incluent des puissances impaires de la matrice des mésons: ils doivent être combinés avec $\Sigma\langle X^\dagger U + U^\dagger X \rangle$. Les corrections ainsi obtenues sont de la forme $\Sigma\mathcal{R}_i$ et comptent comme $O(1/L^2)$.

Pour $\nu = 0$, la forme finale des règles de somme, en incluant les corrections NLO, est:

$$\langle\langle(\bar{\sigma}_2)^2\rangle\rangle_0 = \frac{V^2\mathcal{A}^2}{16N_f^2(N_f^2-1)} [s_2^0 + s_2^{\mathcal{R}} + s_2^r], \quad (5.106)$$

$$\langle\langle\sigma_4\rangle\rangle_0 = \frac{V^2\mathcal{A}^2}{16N_f(N_f^2-1)} [s_4^0 + s_4^{\mathcal{R}} + s_4^r], \quad (5.107)$$

où s_k^0 est l'ordre dominant, déjà calculé dans la section 5.3.3, $s_k^{\mathcal{R}}$ rassemble les termes venant des modes d'impulsion nulle dans $\tilde{\mathcal{L}}_3$, et s_k^r vient de la renormalisation de $\tilde{\mathcal{L}}_2$ induite par les modes d'impulsion non nulle. Le resultat est:

$$s_2^0 = \zeta^2 + \zeta[4(2N_f^2+1)\bar{S} - 4\bar{P} - 4N_f] + [4(2N_f^2+1)(\bar{S}^2 + \bar{P}^2) - 8\bar{S}\bar{P} - 8N_f(\bar{S} + \bar{P}) + 4N_f^2], \quad (5.108)$$

$$s_2^{\mathcal{R}} = \frac{\Sigma}{\mathcal{A}^2} [16N_f(\mathcal{R}_3 - \mathcal{R}_4) + 8N_f(N_f^2 - 1)\mathcal{R}_5 - 16N_f^2\mathcal{R}_6 + 48N_f^2\mathcal{R}_7], \quad (5.109)$$

$$s_2^r = \frac{g}{N_f} \left\{ 2(N_f^2 - 1)\zeta^2 + \zeta[8N_f^2(N_f^2 - 1)\bar{S} - 16N_f^2\bar{P} + 8N_f] + [-8(N_f^2 - 1)(\bar{S}^2 + \bar{P}^2) - 16(3N_f^2 + 1)\bar{S}\bar{P} + 16N_f(N_f^2 + 1)(\bar{S} + \bar{P}) - 16N_f^2] \right\} \\ + u \cdot 4 \frac{N_f^2 - 1}{N_f} \frac{\Sigma(\mathcal{X} + N_f\tilde{\mathcal{X}})}{F^2\mathcal{A}} \left\{ \zeta + 2[(2N_f^2 + 1)\bar{S} - \bar{P} - N_f] \right\}, \quad (5.110)$$

et

$$s_4^0 = \zeta^2 + \zeta[12\bar{S} - 4\bar{P} - 4N_f] + [12\bar{S}^2 + 12\bar{P}^2 - 8\bar{S}\bar{P} - 8N_f\bar{S} - 8N_f\bar{P} + 4], \quad (5.111)$$

$$s_4^{\mathcal{R}} = \frac{\Sigma}{\mathcal{A}^2} [-8(N_f^2 - 1)\mathcal{R}_2 + 16N_f\mathcal{R}_3 - 16N_f\mathcal{R}_4 - 16\mathcal{R}_6 + 48\mathcal{R}_7], \quad (5.112)$$

$$\begin{aligned} s_4^r = & \frac{g}{N_f} \{ 2(N_f^2 - 1)\zeta^2 + \zeta[8(N_f^2 - 1)\bar{S} - 8(N_f^2 + 1)\bar{P} - 4N_f(N_f^2 - 3)] \\ & + [-8(N_f^2 - 1)(\bar{S}^2 + \bar{P}^2) - 16(N_f^2 + 3)\bar{S}\bar{P} \\ & + 32N_f(\bar{S} + \bar{P}) - 8(N_f^2 + 1)] \} \\ & + u \cdot 4 \frac{N_f^2 - 1}{N_f} \frac{\Sigma(\mathcal{X} + N_f\tilde{\mathcal{X}})}{F^2\mathcal{A}} \{ \zeta + 2[3\bar{S} - \bar{P} - N_f] \}. \end{aligned} \quad (5.113)$$

Ces résultats méritent quelques commentaires. A proximité du point critique, caractérisé par le comptage $\Sigma L^2 \sim ML^2 \sim 1$, tous les termes de la contribution dominante s_k^0 sont d'ordre 1. $s_k^{\mathcal{R}}$ et s_k^r rassemblent toutes les contributions NLO, comptées comme $O(1/L^2)$. Par conséquent, pour une valeur donnée du condensat Σ , les moments inverses $\langle\langle(\bar{\sigma}_2)^2\rangle\rangle_0^{(N_f)}/V^2$ and $\langle\langle\sigma_4\rangle\rangle_0^{(N_f)}/V^2$ peuvent être exprimés sous la forme $\sum_{n=-1}^4 a_n L^{2n}$. Les puissances paires $n = 2, 4$ sont les termes dominants, tandis que les puissances impaires $n = -1, 1, 3$ viennent des corrections NLO dues aux modes d'impulsion non nulle. Ainsi, ce type de correction ne se mélange pas avec la contribution dominante, en ce qui concerne la dépendance en volume.

Ceci n'est pas vrai pour $s_k^{\mathcal{R}}$, qui provient de la contribution des modes d'impulsion nulle dans $\tilde{\mathcal{L}}_3$. Le terme constant $n = 0$ des règles de somme est modifié, et cette correction peut être considérée comme petite si Σ est petit (rappelons que l'estimation dimensionnelle des constantes de basse énergie \mathcal{R}_i donne $\mathcal{R}_i \sim F^2/\Lambda_H$ avec $\Lambda_H \sim 1 \text{ GeV}$). Près du point critique, on s'attend précisément à voir Σ petit.

Dans le cas des règles de somme d'ordre λ^{-6} (5.71)-(5.73), la situation est similaire, mais les constantes \mathcal{R}_i affectent déjà le coefficient de ζ^1 dans les règles de somme (ainsi que le terme constant ζ^0).

5.5 Extraction de constantes de basse énergie

Près du point critique $n_{\text{crit}}(N_c)$, nous aimerions exploiter les règles de somme pour $\langle\langle(\bar{\sigma}_2)^2\rangle\rangle_0^{(N_f)}$ et $\langle\langle\sigma_4\rangle\rangle_0^{(N_f)}$ de manière à isoler certains rapports de constantes de basse énergie de $\tilde{\mathcal{L}}_2$. En particulier, il serait intéressant d'obtenir une quantité sensible au franchissement du point critique. Pour atteindre ce but, il est préférable d'éliminer les corrections NLO, qui font intervenir soit des paramètres inconnus comme \mathcal{R}_i , soit des quantités dépendant de la régularisation comme g . Remarquons que les équations (5.106) et (5.107) peuvent être vues comme des expansions dans les variables ΣL^2 et ML^2 . Ce sont donc des fonctions paires de L .

5.5.1 Exploiter la dépendance sur le volume

Pour exploiter la structure des règles de somme au NLO, on peut introduire l'opérateur de "dérivation":

$$\begin{aligned} \delta_a[F](L) &= \frac{a^2}{8L(L^2 - \frac{a^2}{4})} \\ &\times \left\{ \left(L - \frac{a}{2}\right) F(L+a) + \left(L + \frac{a}{2}\right) F(L-a) - 2LF(L) \right\}, \end{aligned} \quad (5.114)$$

où a est un paramètre arbitraire. Si nous considérons un polynôme pair $F(L) = L^{2k}$, $\delta_a[F]$ est aussi un polynôme pair, de degré L^{2k-4} . On a pour les degrés les plus bas:

$$L^0 \rightarrow 0, \quad L^2 \rightarrow 0, \quad L^4 \rightarrow a^4, \quad (5.115)$$

$$L^6 \rightarrow a^4(3L^2 + 2a^2), \quad L^8 \rightarrow a^4(6L^4 + 12L^2a^2 + 3a^2). \quad (5.116)$$

Si nous notons $t_2 = \langle\langle (\bar{\sigma}_2)^2 \rangle\rangle_0^{(N_f)} / V^2$ et $t_4 = \langle\langle \sigma_4 \rangle\rangle_0^{(N_f)} / V^2$, nous avons:

$$\delta_a[N_f t_2 - t_4](L) = \frac{a^4}{2N_f} \Sigma^2 \mathcal{Z}_S + O(1/L^6), \quad (5.117)$$

$$\delta_a[\delta_a[t_2]](L) = \frac{3a^8}{8N_f^2(N_f^2 - 1)} \Sigma^4 + O(1/L^{10}). \quad (5.118)$$

Pour obtenir une quantité invariante sous le groupe de renormalisation de QCD, nous prenons le rapport de ces deux règles de somme:

$$\rho = \frac{\delta_a[\delta_a[t_2]]}{\delta_a[N_f t_2 - t_4]}(L) = \frac{3a^4}{4N_f(N_f^2 - 1)} \cdot \frac{\Sigma^2}{\mathcal{Z}_S} + O(1/L^6). \quad (5.119)$$

Pour évaluer ρ , il faut connaître t_2 et t_4 pour cinq tailles de boîte différentes: $L - 2a$, $L - a$, L , $L + a$, $L + 2a$. Notons que a n'est pas forcément grand: il suffit que $L - 2a$ soit beaucoup plus grand que $1/\Lambda_H$. D'un autre côté, si a est trop petit, l'opérateur de différence δ_a peut devenir très sensible aux erreurs numériques.

Dans le cas d'un tore discrétisé (un réseau), nous pouvons écrire $L = na$ avec n entier et a la maille du réseau. Les équations (5.117)-(5.119) restent vraies, et comparer différents volumes revient à évaluer les moments inverses sur des réseaux de même maille, mais avec des nombres de sites différents. Dans le membre de droite des équations (5.117)-(5.119), les puissances en maille du réseau a reflètent seulement la dimension des quantités en jeu.

Les équations (5.117)-(5.119) ne dépendent pas des contributions NLO: cela permet de considérer des volumes plus petits que ceux considérés auparavant [par exemple, l'estimation $L > 1.9/F$ de la section 5.4.1, s'appuyait

sur une analyse au NLO et ne s'applique pas forcément à la règle de somme (5.119)]. On pourrait donc constater, même pour des volumes assez petits, que les quantités (5.117)-(5.119) ne dépendent pas du volume. Les moments inverses doivent également satisfaire une condition de cohérence:

$$\rho' = \frac{\delta_a[\delta_a[t_2]]}{\delta_a[\delta_a[t_4]]}(L) = \frac{1}{N_f} + O(1/L^{10}). \quad (5.120)$$

Le rapport ρ est invariant sous le groupe de renormalisation de QCD et ses variations avec N_f pourraient refléter la proximité du point critique de manière particulièrement nette, comme la section suivante le suggère.

5.5.2 Intérêt du rapport \mathcal{Z}_S/Σ^2

Dans les Secs. 2.4.3 et 2.5.4, l'étude du spectre de l'opérateur de Dirac (2.5.4) nous a montré que Σ pouvait être interprété comme la densité moyenne des petites valeurs propres, tandis que \mathcal{Z}_S était relié à la corrélation densité-densité. Le rapport \mathcal{Z}_S/Σ^2 mesure donc la fluctuation du condensat de quarks. Pour N_f près du point critique $n_{\text{crit}}(N_c)$ où Σ s'annule, on peut s'attendre à une suppression de Σ et à une augmentation de la fluctuation \mathcal{Z}_S .

Si m est la masse commune des N_f quarks les plus légers, on tire de (2.72) [dans l'approximation $Z_{\text{eff}} \sim 2\mathcal{Z}_S$]:

$$\frac{F_\pi^4 \mathcal{Z}_S(N_f + 1)}{\Sigma^2(N_f + 1)} \sim \frac{F_\pi^4 Z_{\text{eff}}}{2\Sigma^2(N_f + 1)} \quad (5.121)$$

$$= \frac{X(N_f) - X(N_f + 1)}{[X(N_f + 1)]^2} \cdot \frac{F_\pi^2}{2rM_\pi^2} + \dots \quad (5.122)$$

où les points de suspension indiquent les ordres supérieurs. Pour $N_f \ll n_{\text{crit}}(N_c)$, le membre de droite de (5.122) est très petit. Pour l'estimer, considérons les estimations de χ PT Standard $N_f = 2$: $X(2) \sim 0.9$ et $r \sim 26$. L'étude du Ch. 4 confirme dans ce cadre l'analyse standard effectuée dans [65], qui aboutit à la borne: $X(2) - X(3) > 0.2$. Considérons cette borne comme une égalité. Dans ce cas, le membre de droite de (5.122) est d'ordre 10^{-2} . La proximité d'une transition de phase pourrait être détectée par une augmentation considérable du rapport (5.121) au-dessus de sa taille typique $\sim 10^{-2}$.

5.5.3 Application au réseau

L'évaluation des moments inverses sur un réseau présente des caractéristiques intéressantes. Nous travaillons à volume fini: la dépendance en volume

est cruciale pour obtenir des informations sur les constantes à basse énergie du lagrangien effectif, et l'extrapolation à un volume infini est évitée. La limitation au secteur topologiquement trivial est naturelle sur le réseau, si on choisit des conditions aux bords strictement périodiques.

Nous ne cherchons pas à résoudre sur le réseau QCD dans son intégralité. Nous voulons calculer des moments inverses du spectre de Dirac, moyennés sur les configurations gluoniques avec le poids statistique (5.11). Pour accomplir cette tâche plus limitée, nous devons connaître le spectre de Dirac pour chaque configuration gluonique. Ce dernier peut être obtenu grâce au carré de l'opérateur de Dirac: $\mathcal{D}^2 = D^2 + iF^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}$. Il semble beaucoup plus simple de discrétiser cet opérateur au lieu de \mathcal{D} lui-même. En particulier, le problème des doubleurs ne devrait pas apparaître avec un opérateur elliptique tel que D^2 . Soulignons que cette procédure, très utile pour notre problème particulier, peut difficilement constituer une solution générale pour traiter les fermions sur réseau.

Pour une configuration gluonique donnée, nous pouvons calculer de la sorte les moments inverses à partir du spectre de l'opérateur de Dirac (ce dernier est indépendant du nombre de saveurs). La contribution essentielle pour chaque moment inverse vient des valeurs propres les plus basses. Dans ce cas, la dépendance en N_f de la moyenne $\langle\langle\rangle\rangle_0^{(N_f)}$ devrait provenir essentiellement de la N_f -ième puissance du produit des valeurs propres les plus basses, c'est-à-dire de la partie infrarouge du déterminant fermionique tronqué (2.68). La partie ultraviolette du déterminant devrait alors être incluse comme une queue perturbative, comme discuté dans [94]. Une première possibilité consiste à générer les configurations gluoniques dans l'approximation quenched ($N_f = 0$ à cette étape), puis à inclure explicitement la N_f -ième puissance du déterminant fermionique dans l'observable à calculer. Cette méthode aurait l'avantage de permettre un changement immédiat et continu de N_f en conservant le même ensemble de configurations gluoniques. Mais la simulation Monte-Carlo de la théorie de pure jauge peut mener à une distribution assez différente des petites valeurs propres de Dirac, quand on la compare à une simulation incluant le déterminant fermionique dans le poids statistique. Si cette procédure de *reweighting* s'avère inefficace, la génération des configurations gluoniques devrait inclure produit des plus basses valeurs propres dans le poids statistique. Les configurations devraient être régénérées pour chaque N_f .

Le calcul du rapport ρ semble particulièrement séduisant dans ce cadre. Il nous faut comparer cinq tailles différentes de réseau pour obtenir ce rapport, invariant sous le groupe de renormalisation de QCD et protégé des corrections NLO. Quand N_f augmente, une élévation de $1/\rho$ indiquerait clairement la

proximité du point critique $n_{\text{crit}}(N_c)$ où le condensat s'annule.

5.6 Résumé

Il est très intéressant de mettre en correspondance deux descriptions de QCD euclidienne sur un tore : la première s'intéresse au spectre de l'opérateur de Dirac tandis que la seconde s'appuie sur la théorie effective des bosons de Goldstone. La brisure spontanée de la symétrie chirale peut être reliée au comportement à grand volume des moments inverses des valeurs propres de Dirac $\sum_{n>0} 1/\lambda_n^k$, moyennés sur des ensembles topologiques de configurations gluoniques. A cause de leur sensibilité à N_f , ces moments inverses peuvent servir à détecter des transitions de phases chirales se produisant quand augmente le nombre de saveurs de masse nulle.

Supposons que $\Sigma(N_f)$ s'annule avant $F^2(N_f)$. Au-dessus du premier point critique $n_{\text{crit}}(N_c)$ où le condensat de quarks s'annule, la symétrie chirale n'est alors que partiellement restaurée. Lorsque nous sommes en dessous de ce point critique, le comportement asymptotique des moments spectraux est donné par les règles de Leutwyler-Smilga (5.33)-(5.35) et régi par le condensat de quarks (un tel comportement correspond à des valeurs propres s'accumulant comme $1/L^4$). Au-dessus de $n_{\text{crit}}(N_c)$, la dépendance en volume des moments inverses change [voir (5.37)-(5.38)] et correspond à des valeurs propres s'accumulant comme $1/L^2$. Dans ce cas, la contribution dominante provient de termes quadratiques en masses de quarks dans le lagrangien effectif.

Quand N_f augmente et s'approche de $n_{\text{crit}}(N_c)$, le condensat de quarks devient petit, et ses fluctuations (liées à la violation de la règle de Zweig dans le secteur scalaire) devraient devenir grandes: les termes du lagrangien effectif lineaires et quadratiques en masses de quarks pourraient contribuer de manière comparable. Il peut donc être nécessaire d'inclure ces deux types de terme dans l'ordre dominant de l'expansion de \mathcal{L}_{eff} pour dériver le comportement asymptotique des moments inverses qui interpole entre les deux phases. Les règles de sommes ainsi obtenues ont été analysées dans le secteur topologiquement trivial $\nu = 0$ [voir (5.69)-(5.73)]. En particulier, les formules concernant des moments inverses positifs conduisent à des contraintes sur les paramètres du lagrangien effectif.

Pour $N_f \ll n_{\text{crit}}(N_c)$, les premières corrections sous-dominantes aux règles de Leutwyler-Smilga proviennent des modes d'impulsion non nulle, et se ramènent à une rédefinition (dépendant de V) de la constante de basse énergie Σ . Pour N_f se rapprochant de $n_{\text{crit}}(N_c)$, les corrections NLO sont de deux types. La partie due aux modes d'impulsion non nulle se traduit par une redéfinition des constantes de basse énergie Σ , \mathcal{Z}_S , \mathcal{Z}_P and \mathcal{A} . La contribu-

tion des modes d'impulsion nulle peut être calculée directement pour $\nu = 0$. Ces deux types de corrections sont supprimés par un facteur $O(L^{-2})$, par rapport à la contribution dominante.

Des combinaisons de moments inverses permettent d'isoler le rapport des constantes de basse énergie \mathcal{Z}_S/Σ^2 qui est particulièrement sensible au passage de $n_{\text{crit}}(N_c)$. La formule à 5 volumes (5.119) ainsi obtenue est de plus insensible aux corrections NLO et invariante sous le groupe de renormalisation de QCD. Le calcul sur réseau des moments inverses de l'opérateur de Dirac pourrait permettre d'étudier les transitions de phases chirales, en variant des paramètres fixés dans le monde réel, comme N_f et N_c . A partir de configurations gluoniques à $\nu = 0$, il s'agit de calculer les spectres de Dirac correspondants, obtenus par diagonalisation de $D^2 + F\sigma/2$, puis de calculer des sommes de ces valeurs propres. La dépendance sur N_f est explicitement présente à travers le partie infrarouge du déterminant fermionique, et les effets de taille finie sont pris en compte et essentiels pour notre analyse.

Chapitre 6

Conclusion

La brisure spontanée de la symétrie chirale reste un problème fondamental de la physique des particules. Si des expériences doivent bientôt nous éclairer sur le cas de 2 quarks (u et d) sans masse, la structure chirale du vide pour 3 (ou plus généralement N_f) quarks de masse nulle reste à explorer.

Le mécanisme de la brisure de symétrie chirale est-il fortement dépendant du nombre de saveurs légères? L'étude de la fonction β en QCD perturbative nous indique que la symétrie chirale doit être restaurée pour N_f suffisamment grand (au-dessus de $11N_c/2$). Des transitions de phase chirales doivent donc avoir lieu quand N_f augmente. La règle de Zweig et la limite du grand N_c militent néanmoins pour une dépendance faible dans le cas de QCD ($N_f = 2, 3$), bien que ces deux prescriptions soient mises en défaut dans le canal scalaire 0^{++} .

Pour traiter cette question, il est intéressant de se placer sur un tore euclidien (de volume L^4) pour y étudier le spectre de l'opérateur de Dirac \not{D} . Les petites valeurs propres de cet opérateur s'accumulent autour de 0 dans la limite $L \rightarrow \infty$ et jouent un rôle important dans la brisure de la symétrie chirale. Deux paramètres d'ordre chiraux sont dominés par l'accumulation de ces petites valeurs propres : le condensat de quarks $\Sigma(N_f)$ (paramètre d'ordre chirale le plus simple) et la constante de désintégration pseudoscalaire $F^2(N_f)$ (signal non-ambigu de la brisure spontanée de la symétrie chirale). Grâce à la borne dérivée par Vafa et Witten sur le spectre de l'opérateur de Dirac, nous avons vu que le déterminant fermionique supprime ces paramètres d'ordre quand N_f augmente. Σ et F^2 devraient donc être des fonctions décroissantes du nombre de saveurs légères. Reste à évaluer l'importance de cet effet, qui est lié à la violation de la règle de Zweig dans le secteur scalaire 0^{++} (nombres quantiques du vide).

Dans le cas de QCD, la hiérarchie de masse $m_u, m_d \ll m_s \ll \Lambda_H$ permet de comparer $SU_L(2) \otimes SU_R(2)$ ($m_u, m_d \rightarrow 0$ mais m_s physique) et

$SU_L(3) \otimes SU_R(3)$ ($m_u, m_d, m_s \rightarrow 0$). Grâce à la Théorie de Perturbations Chirale, on peut développer les masses et les constantes de désintégration des mésons pseudoscalaires π, K, η en puissances de masses de quarks $m = (m_u + m_d)/2$ et m_s . Pour exploiter ces relations, on suppose souvent que le rapport de Gell-Mann–Oakes–Renner $X(3) = 2m\Sigma(3)/(F_\pi^2 M_\pi^2)$ est d'ordre 1 (cadre Standard). On peut toutefois adopter des hypothèses moins fortes pour analyser ces expansions, en conservant les deux premiers ordres de ces développements [jusqu'à $O(m_{\text{quark}}^2)$ pour $F_P^2 M_P^2$, et $O(m_{\text{quark}})$ pour F_P^2] et en supposant que les restes d'ordre supérieur sont petits. On présume ainsi qu'il y a convergence globale des expansions, mais on autorise une compétition entre les deux premiers termes de chaque série. On peut alors réexprimer les constantes de basse énergie $L_{i=4\dots 8}$ [ainsi que $X(2)$ et $F(2)$] en fonction d'observables (F_P, M_P) et de $X(3), F(3), r = m_s/m$.

Il s'avère que $X(2)$ est fortement corrélé à r , tandis que $X(3)$ est particulièrement sensible à la valeur de la constante de basse énergie L_6 . Il suffit que $L_6(M_\rho)$ soit légèrement positive pour avoir une grande différence $X(2) - X(3)$. Deux phénomènes distincts pourraient donc aboutir à un petit condensat de quarks à 3 saveurs : soit r est petit (10-15) avec $X(2)$ et $X(3)$ petits, soit r est de taille standard (autour de 25) avec $X(2)$ d'ordre 1, mais $X(3)$ est petit à cause de L_6 . L_4 joue un rôle analogue pour les constantes de désintégration $F(2)$ et $F(3)$.

Même si les expériences autour de la diffusion $\pi\pi$ doivent nous éclairer sur le mécanisme de brisure spontanée de $SU_L(2) \otimes SU_R(2)$, elles ne nous renseigneront guère sur $N_f = 3$. $X(2)$ et $X(3)$ peuvent être de tailles très différentes, si la violation de la règle de Zweig dans le secteur scalaire est importante. L'ampleur de cette violation peut être estimée en exploitant des données expérimentales du canal 0^{++} au sein d'une règle de somme pour le corrélateur de deux densités scalaires $\langle(\bar{u}u)(\bar{s}s)\rangle$. La règle de somme fait intervenir d'une part le comportement à haute énergie de ce corrélateur (Expansion en Produits d'Opérateurs) et d'autre part sa partie imaginaire à basse énergie (fonction spectrale).

La partie imaginaire du corrélateur peut s'exprimer (jusqu'à 1.2 GeV) en terme des facteurs de forme scalaires du pion et du kaon. Ces facteurs s'obtiennent en résolvant des équations couplées d'Omnès-Muskhelishvili, où apparaît la matrice T pour les canaux $\pi\pi$ et $K\bar{K}$. Les solutions dépendent du modèle de matrice T choisi et des normalisations des facteurs de forme à zéro. La fonction spectrale est dominée par le pic du $f_0(980)$, ce qui induit une grande différence entre $X(2)$ et $X(3)$. On peut quantifier cet effet pour contraindre la valeur de $X(3)$ en fonction de $F(3)$ et de r . $X(3)$ s'avère nettement plus petit que $X(2)$.

La pente à l'origine du facteur de forme étrange du pion peut aussi être

exploitée pour contraindre $X(3)$ et $F(3)$ en fonction de r . On constate une forte décroissance des deux paramètres d'ordre entre $N_f = 2$ et $N_f = 3$. Cette seconde contrainte s'appuie sur des détails fins d'un facteur de forme, obtenu à l'aide d'un modèle de matrice T . Elle pourrait donc être moins fiable que celle dérivée de la règle de somme.

Une forte décroissance du condensat de quarks pourrait s'expliquer dans le cadre plus spéculatif de transitions de phases chirales. Le condensat de quarks Σ et la constante de désintégration pseudoscalaire F^2 ne sont pas sensibles au même type de valeurs propres de l'opérateur de Dirac (sur un tore euclidien de taille L). Σ est sensible aux valeurs propres s'accumulant comme $1/L^4$ quand $L \rightarrow \infty$, alors qu'il suffit d'un comportement en $1/L^2$ pour contribuer à F^2 . Σ pourrait ainsi décroître plus rapidement que F^2 , ce qui suggère un scénario comportant 3 phases. Lorsque N_f augmente, Σ serait le premier paramètre d'ordre chirale à s'annuler pour une valeur critique $n_{\text{crit}}(N_c)$. Mais F^2 ne s'annulerait pas encore dans cette seconde phase (i.e. la symétrie chirale serait encore brisée), et il faudrait attendre un second point critique $N_{\text{crit}}(N_c) > n_{\text{crit}}(N_c)$ pour observer l'annulation de F^2 et la restauration de la symétrie chirale.

Σ peut s'interpréter comme la densité des valeurs propres de l'opérateur de Dirac euclidien autour de 0, tandis que le corrélateur $\langle(\bar{u}u)(\bar{s}s)\rangle$ correspond aux fluctuations de ces valeurs propres. À l'approche du point critique $n_{\text{crit}}(N_c)$, on devrait voir la densité d'états diminuer et les fluctuations augmenter. Un tel scénario [avec $n_{\text{crit}}(3)$ proche de 3] pourrait rendre compte d'une grande différence entre $X(2)$ et $X(3)$. Pour confirmer ou infirmer ce scénario, et plus généralement pour étudier la restauration de la symétrie chirale quand N_f augmente, on peut se concentrer sur des moments inverses des valeurs propres, moyennés sur des ensembles topologiques de configurations gluoniques (nombre d'enroulement fixé). Des règles de somme relient la structure chirale du vide au comportement de ces moments inverses pour des tores de grand volume. Si $X(N_f) \sim 1$, le comportement asymptotique de ces moments est dicté par le condensat de quarks $\Sigma(N_f)$. Ce comportement est donc radicalement modifié dans la seconde phase, où le condensat de quarks est nul. Si $X(N_f)$ est petit, mais non nul, les moments ont une dépendance en volume plus complexe, qui reflète une compétition entre le condensat de quarks et d'autres paramètres d'ordre chiraux (termes quadratiques en masses de quarks dans le lagrangien effectif).

Ces règles de somme sont dérivées en considérant le lagrangien effectif à l'ordre le plus bas et en supposant que les états d'impulsion nulle dominent. Nous avons calculé les premières corrections sous-dominantes (NLO) à ces règles de somme, quand $X(N_f)$ est d'ordre 1 ou quand il reste un paramètre libre. Ces corrections sous-dominantes proviennent des ordres supérieurs du

lagrangien effectif et des états d'impulsion non nulle. En comparant la valeur de moments inverses pour différents volumes, on peut éliminer ces corrections sous-dominantes et isoler le rapport Z_s/Σ^2 (fluctuation des valeurs propres/densité). Ce rapport devrait fortement augmenter au voisinage du point critique $n_{\text{crit}}(N_c)$. L'évaluation sur réseau de ces moments inverses offre d'intéressantes perspectives, même si l'inclusion correcte du déterminant fermionique pourrait s'avérer ardue.

Beaucoup de problèmes restent sans réponse. La détermination expérimentale de $X(2)$ devrait nous permettre de fixer $r = m_s/m$. La règle de somme pour $\langle(\bar{u}u)(\bar{s}s)\rangle$, contraindrait alors plus sévèrement la valeur de $X(3)$. Mais cette méthode est très indirecte et sujette à diverses incertitudes : ordres supérieurs dans l'expansion en masses de quarks, modèles de matrice T , intégrale dans les énergies intermédiaires. Une meilleure connaissance du secteur scalaire 0^{++} nous guiderait dans le choix des modèles de matrice T . Le traitement des ordres supérieurs pourrait aussi être affiné afin de réduire les incertitudes. Mais il reste indispensable de déterminer expérimentalement (et plus directement) la structure chirale du vide pour $N_f = 3$. Il faudra identifier les processus du secteur étrange reflétant cette brisure de $SU_L(3) \otimes SU_R(3)$ et accessibles expérimentalement. A ce titre, les désintégrations K_{l4} (et éventuellement les désintégrations rares du K) méritent une analyse détaillée [95].

En QCD, il ne nous est pas possible d'apprendre beaucoup sur la brisure de la symétrie chirale pour des valeurs plus élevées de N_f par la voie expérimentale. Il faut recourir à d'autres outils, comme les simulations sur réseau où N_f est a priori un paramètre ajustable à volonté. Les difficultés que ces simulations rencontrent avec les fermions de masse nulle sont bien connues. L'inclusion du déterminant fermionique recourt à des méthodes de bosonisation qui ne s'appliquent qu'à un nombre de saveurs pair. Le secteur $SU_L(3) \otimes SU_R(3)$ reste en particulier hors d'atteinte. De plus, les opérateurs généralement proposés (Dirac-Wilson) brisaient explicitement la symétrie chirale. Des développements récents autour de la relation de Ginsparg-Wilson (*overlap* et *domain-wall fermions*) ont grandement amélioré la situation en proposant des opérateurs de Dirac brisant la symétrie chirale le plus doucement possible [96]. Mais l'inclusion du déterminant fermionique semble encore délicate dans le cas de ces opérateurs. Des progrès dans la simulation de fermions chiraux dynamiques seraient évidemment bienvenus.

En connaissant mieux la structure chirale du vide de QCD, et en particulier son évolution avec N_f , nous approfondissons notre compréhension de la dynamique des effets non-perturbatifs dans les théories de jauge non-abéliennes. Outre l'intérêt théorique de cette question, des applications plus phénoménologiques sont envisageables. Par exemple, la brisure de la symétrie

électrofaible peut s'interpréter dans deux cadres très différents : soit des Higgs scalaires élémentaires protégés par la supersymétrie, soit la brisure d'une symétrie chirale transmise au secteur électrofaible par le mécanisme de Higgs (modèles de type Technicouleur). Pour confronter ce deuxième type de théorie aux mesures de précision du Modèle Standard, on a souvent imaginé que la brisure spontanée de leur symétrie chirale devait s'inspirer du mécanisme généralement admis pour QCD. Le condensat de quarks était pris comme paramètre d'ordre dominant, et un simple changement d'échelle fournissait les valeurs des constantes de basse énergie pour N_f et N_c à partir de la χ PT Standard. Ces hypothèses simplificatrices ont parfois conduit à exclure certains modèles de type Technicouleur [97]. Des mécanismes différents de brisure de symétrie chirale pourraient restreindre la portée de telles conclusions [98]. Il serait judicieux de reprendre ces analyses en recueillant l'ensemble des mesures de précision disponibles pour contraindre la structure chirale du vide dans les modèles de Technicouleur [99]. Nous disposerions ainsi d'une alternative aux modèles supersymétriques pour discuter des manifestations d'une nouvelle physique à l'échelle du TeV.

Chapitre 7

Remerciements

Je suis évidemment redevable à mon directeur de thèse, Jan Stern, sur bien des plans. Il a su me guider à travers un domaine passionnant et complexe, en me faisant partager ses intuitions, ses certitudes et ses doutes. Il m'a montré qu'un physicien pouvait consacrer la même ardeur à des questions théoriques poussées et à des études phénoménologiques complexes, et que ces deux directions, loin d'être divergentes, pouvaient être suivies parallèlement en s'enrichissant mutuellement. J'espère sincèrement que l'avenir exaucera ses vœux. Merci également à Bachir Moussallam et Hagop Sazdjian, ainsi qu'à Marc Knecht et Véronique Bernard, pour les moments de travail (et ceux de détente) passés ensemble.

Je suis très honoré que Pierre Binetruy ait accepté de présider mon jury de thèse. Je remercie vivement Ulf Meißner et Andrei Smilga d'avoir accepté la lourde charge de rapporteur, et je suis particulièrement reconnaissant des commentaires et des remarques dont ils m'ont fait part. Enfin, merci à eux, ainsi qu'à Guido Martinelli, pour avoir accepté de participer à mon jury en dépit des distances.

Je voudrais également remercier ceux qui ont participé à ma formation, les enseignants de l'X et ceux du DEA de Physique Théorique. Je pense aussi à Carlos Savoy, qui m'a fait découvrir le monde de la recherche, et qui a accepté de subir quotidiennement, pendant plusieurs mois, les questions naïves d'un petit étudiant qui ignorait tout de la théorie quantique des champs, au cours d'un stage au Service de Physique Théorique au CEA-Saclay.

Il est bien naturel de remercier Sydney Gallès, Nimet Frascaria et Nguyen Van Giai, qui m'ont permis de travailler à l'IPN dans les meilleures conditions possibles. Merci au Groupe de Physique Théorique de m'avoir accueilli et hébergé pendant ma thèse.

Trois années assis dans la même chaise, penché sur la même table, à lire des articles et à raturer des feuilles. C'est une durée respectable, que j'ai eu

la chance de partager avec Luca, puis Pere. Installé dans le même bureau, j'ai appris à connaître et à apprécier leurs personnalités. Ils m'ont beaucoup appris, scientifiquement et humainement. Je souhaite pouvoir leur rendre un jour la pareille.

J'ai découvert l'enseignement universitaire à Orsay sous la houlette de Jacques Solomon et Brigitte Rocca. Leurs conseils et leurs explications me furent d'une grande aide pour mes premiers pas sur une estrade. Grâce à eux, j'ai pris goût au travail périlleux et gratifiant de l'enseignant. J'espère que j'aurai d'autres occasions de m'y livrer. Je dois également saluer l'efficacité et la bonne humeur constantes de Françoise Pallais, qui a contribué pour beaucoup au plaisir de ces heures studieuses.

Merci à Marie-Thérèse et à Michèle pour m'avoir aidé à régler en douceur les petits soucis quotidiens d'un thésard anxieux. Je salue également les bibliothécaires et secrétaires de l'IPN que j'ai cotoyées et qui ont su me guider à travers les jungles des publications internationales et des administrations françaises.

Impossible d'oublier ceux et celles qui partagent aux mêmes moments les mêmes joies et les mêmes angoisses, les thésards que l'on rencontre pendant sa propre thèse : Nicolas (dans sa petite maison canadienne), David et Olivier (qui sont parvenus à me faire douter des probabilités les plus élémentaires), Marjorie (que je pars rejoindre en Angleterre), Elias, Jérôme, Julien, mais aussi Nicolas et Thomas du LPTPE... et bon courage à Johannes et Frédéric, pour qui l'aventure ne fait que commencer.

Ces années à Orsay furent aussi l'occasion de se lancer dans l'aventure associative : longue vie à HBO et à ses membres, Delphine, Célia, Yann, Laurent, Sylvain (ne riez pas, les gars, ce sera bientôt votre tour !), Patrice, William, Antoine, Arnaud, Didier... et tous les autres, anciens et nouveaux. Je vous fais confiance pour animer encore un peu plus le campus ces prochaines années !

Impossible d'exprimer tout ce que l'on doit à ses parents. Un livre n'y suffirait pas. Anny et Jean ont accepté et soutenu sans jamais défaillir mes choix de vie, d'études et de travail. Pour cela, ils ont droit à mon admiration autant qu'à mon amour. J'ai également une pensée pour toute ma famille (de Paris, de Lorraine, de Lyon, de Grenoble... et d'Afrique), avec une mention spéciale pour Isabelle, qui m'a devancé dans la course au doctorat.

Le dernier remerciement, mais pas le moindre, s'adresse à Jean-Luc qui a été, pendant ces quatre ans, présent dans les bons jours comme dans les mauvais, les éclairant tous à sa manière si personnelle. Cette thèse est presque autant son œuvre que la mienne. Elle lui est dédiée.

Annexe A

Rappels

A.1 Fermions en métrique euclidienne

Nous avons vu dans la Section 2.4.1, comment la rotation de Wick permettait de passer d'une métrique minkowskienne à une métrique euclidienne pour des champs scalaires et vectoriels. Dans le cas des spineurs, la situation est plus subtile [100]. Il est possible dans les deux cas d'écrire les générateurs infinitésimaux du groupe sous la forme de deux sous-algèbres $SU(2)$ qui commutent, et de classer les représentations par deux indices demi-entiers (m, n) . Pour $SO(4)$, les générateurs ainsi définis sont hermitiens, et les deux sous-algèbres sont indépendantes. Les spineurs gauches $(1/2, 0)$ et droits $(0, 1/2)$ se transforment selon:

$$\psi_L^e \rightarrow \Lambda_L^e \psi_L^e \quad \psi_R^e \rightarrow \Lambda_R^e \psi_R^e \quad \Lambda_L^e (\Lambda_L^e)^\dagger = \Lambda_R^e (\Lambda_R^e)^\dagger = 1. \quad (\text{A.1})$$

Ce n'est pas le cas pour $SO(3, 1)$, où les transformations des spineurs gauches et droits ne sont pas indépendantes:

$$\psi_L \rightarrow \Lambda_L \psi_L \quad \psi_R \rightarrow \Lambda_R \psi_R \quad \Lambda_L^{-1} = \Lambda_R^\dagger, \quad (\text{A.2})$$

où Λ_L et Λ_R ne sont pas unitaires. Cette différence topologique entre $SO(4)$ et $SO(3, 1)$ apparaît par exemple dans le cas des spineurs de Majorana. A partir d'un seul spineur droit (ou d'un spineur gauche) dans l'espace minkowskien, il est possible de construire un spineur à 4 composantes, autoconjugué de charge, appelé spineur de Majorana. Un tel objet ne peut être construits dans un espace euclidien. On peut construire dans les deux métriques des spineurs de Dirac $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$. En métrique minkowskienne, on peut obtenir à partir d'un spineur ψ son spineur conjugué $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$. Comme les spineurs gauches et droits ont des lois de transformations indépendantes en

métrique euclidienne, l'opération de conjugaison n'est pas définie, et $\bar{\psi}$ est un spineur indépendant de ψ .

On peut reprendre la construction des matrices de Dirac en métrique euclidienne pour obtenir les équivalences:

$$g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1) \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = (1, 1, 1, 1), \quad (\text{A.3})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \rightarrow \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (\text{A.4})$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \psi^\dagger, \quad (\text{A.5})$$

$$\gamma_0 \rightarrow \bar{\gamma}_0 = i\gamma_0, \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma_i \rightarrow \bar{\gamma}_i = \gamma_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (\text{A.7})$$

$$\gamma_5 \rightarrow \bar{\gamma}_5 = \gamma_5, \quad (\text{A.8})$$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \rightarrow \{\bar{\gamma}_\mu, \bar{\gamma}_\nu\} = -2\bar{g}_{\mu\nu}, \quad (\text{A.9})$$

qui permet de bâtir pour $\text{SO}(4)$ des quantités covariantes semblables à celles de $\text{SO}(3, 1)$.

Les relations habituelles sur les matrices de Dirac sont évidemment altérées car leurs relations d'anticommutation sont modifiées. Notons en particulier que les matrices $\bar{\gamma}_\mu$ ($\mu = 0 \dots 3$) sont toutes antihermitiennes. La distinction entre $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ et $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ est sans objet dans la métrique euclidienne, et $d^4x \tilde{G}G$ est invariant sous la rotation de Wick, car $\tilde{G}G$ contient une unique dérivée temporelle qui compense la rotation de l'élément d'intégration.

A.2 Intégration sur les matrices unitaires

Dans l'espace de saveurs, nous pouvons définir un ensemble complet $\{t_a\}$ de N_f^2 matrices hermitiennes $N_f \times N_f$ génératrices de $\text{U}(N_f)$. a est un indice allant de 0 à $N_f^2 - 1$: t_0 est proportionnelle à l'identité, et les autres matrices sont de trace nulle. Elles sont normalisées selon:

$$\langle t_a t_b \rangle = \frac{1}{2} \delta_{ab}, \quad \sum_a t_a t_a = \frac{1}{2} N_f, \quad (\text{A.10})$$

avec les identités intéressantes pour toutes matrices A et B [89]:

$$\sum_a \langle t_a A \rangle \langle t_a B \rangle = \frac{1}{2} \langle AB \rangle, \quad (\text{A.11})$$

$$\sum_a t_a A t_a = \frac{1}{2} \langle A \rangle, \quad \sum_a \langle t_a A t_a B \rangle = \frac{1}{2} \langle A \rangle \langle B \rangle. \quad (\text{A.12})$$

Nous pouvons décomposer toute matrice complexe sur cette base: $X = \sum_a X_a t_a$. Une intégrale sur $\text{U}(N_f)$ de variable U (matrice unitaire) sera

non nulle seulement si elle contient autant de composantes provenant de $U = \sum_a U_a t_a$ que de $U^\dagger = \sum_a U_a^* t_a$. Les plus simples sont:

$$\int_{U(N_f)} [dU] = 1, \quad (\text{A.13})$$

$$\int_{U(N_f)} [dU] \quad U_a U_b^* = \frac{2}{N_f} \delta_{ab}, \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \int_{U(N_f)} [dU] \quad U_a U_b^* U_c U_d^* &= \frac{4}{N_f^2 - 1} (\delta_{ab} \delta_{cd} + \delta_{ad} \delta_{bc}) \\ &\quad - \frac{16}{N_f(N_f^2 - 1)} \langle t_a t_b t_c t_d + t_a t_d t_c t_b \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} \int_{U(N_f)} [dU] \quad U_a U_b^* U_c U_d^* U_e U_f^* &= \frac{8}{N_f(N_f^2 - 1)(N_f^2 - 4)} \\ &\times \left\{ (N_f^2 - 2) [\delta_{ab} \delta_{cd} \delta_{ef} + \delta_{ab} \delta_{cf} \delta_{ed} + \delta_{ad} \delta_{cb} \delta_{ef} \right. \\ &\quad \left. + \delta_{ad} \delta_{cf} \delta_{eb} + \delta_{af} \delta_{cb} \delta_{ed} + \delta_{af} \delta_{cd} \delta_{eb}] \right. \\ &\quad - 4N_f [\delta_{ab} \langle t_c t_d t_e t_f + t_c t_f t_e t_d \rangle + \delta_{ad} \langle t_b t_c t_f t_e + t_b t_e t_f t_c \rangle \\ &\quad + \delta_{af} \langle t_b t_c t_d t_e + t_b t_e t_d t_c \rangle + \delta_{cb} \langle t_a t_d t_e t_f + t_a t_f t_e t_d \rangle \\ &\quad + \delta_{cd} \langle t_a t_b t_e t_f + t_a t_f t_e t_b \rangle + \delta_{cf} \langle t_a t_b t_e t_d + t_a t_d t_e t_b \rangle \\ &\quad + \delta_{eb} \langle t_a t_d t_c t_f + t_a t_f t_c t_d \rangle + \delta_{ed} \langle t_a t_b t_c t_f + t_a t_f t_c t_b \rangle \\ &\quad \left. + \delta_{ef} \langle t_a t_b t_c t_d + t_a t_d t_c t_b \rangle] \right. \\ &\quad + 16 \langle t_a t_b t_c t_d t_e t_f + t_a t_b t_e t_d t_c t_f + t_a t_b t_e t_f t_c t_d + t_a t_b t_c t_f t_e t_d \\ &\quad + t_a t_d t_c t_b t_e t_f + t_a t_d t_e t_b t_c t_f + t_a t_d t_e t_f t_c t_b + t_a t_d t_c t_f t_e t_b \\ &\quad \left. + t_a t_f t_c t_d t_e t_b + t_a t_f t_e t_d t_c t_b + t_a t_f t_e t_b t_c t_d + t_a t_f t_c t_b t_e t_d \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

A.3 Identités de Ward chirales

La fonctionnelle génératrice de QCD est donnée par (3.3):

$$\begin{aligned} e^{i\Gamma[v, a, s, p, \theta]} &= \int [DG][D\psi][D\bar{\psi}] \\ &\quad \times \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{QCD}}[v, a, s, p, \theta] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}}[v, a, s, p, \theta] &= \mathcal{L}_f + \sum_Q (iD\not{D} - M_Q)Q \\ &\quad - \frac{1}{4} G^{\alpha; \mu\nu} G_{\mu\nu}^\alpha - \frac{g^2}{32\pi^2} \theta \tilde{G}^{\alpha; \mu\nu} G_{\mu\nu}^\alpha \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$+ \sum_q \bar{\psi} [\gamma^\mu (iD_\mu + v_\mu + \gamma_5 a_\mu) - s + \gamma_5 p] \psi.$$

Pour obtenir une expression simple des identités de Ward, nous allons promouvoir la symétrie chirale sous une forme locale, en transformant les champs fermioniques selon:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = V_R(x)\psi_R(x) + V_L(x)\psi_L(x), \quad (\text{A.19})$$

avec

$$V_L(x) = \exp \left\{ i \sum_{a=0}^{N_f^2-1} \alpha_L^a(x) \lambda^a \right\}, \quad V_R(x) = \exp \left\{ i \sum_{a=0}^{N_f^2-1} \alpha_R^a(x) \lambda^a \right\}. \quad (\text{A.20})$$

Sous (A.19), seul le terme de sources de (3.4) subit une modification:

$$\bar{\psi}' [\gamma^\mu (v_\mu + \gamma_5 a_\mu) - s + i\gamma_5 p] \psi' = \bar{\psi} [\gamma^\mu (v'_\mu + \gamma_5 a'_\mu) - s' + i\gamma_5 p'] \psi, \quad (\text{A.21})$$

avec:

$$(v'_\mu + a'_\mu)(x) = V_R(x)(v_\mu + a_\mu)(x)V_R^\dagger(x) + iV_R(x)\partial_\mu V_R^\dagger(x) \quad (\text{A.22})$$

$$(v'_\mu - a'_\mu)(x) = V_L(x)(v_\mu - a_\mu)(x)V_L^\dagger(x) + iV_L(x)\partial_\mu V_L^\dagger(x) \quad (\text{A.23})$$

$$(s' + ip')(x) = V_R(x)(s + ip)(x)V_L^\dagger(x) \quad (\text{A.24})$$

$$(s' - ip')(x) = V_L(x)(s - ip)(x)V_R^\dagger(x). \quad (\text{A.25})$$

On voit donc que (A.19) est équivalente à une transformation locale des sources. Toutefois, la mesure de l'intégration fermionique n'est pas invariante sous (A.19). Il faudra donc introduire un jacobien Δ pour prendre en compte tous les effets de cette transformation locale.

Pour des transformations infinitésimales,

$$V_L(x) = 1 + i\alpha(x) + i\beta(x) + \dots \quad V_R(x) = 1 + i\alpha(x) - i\beta(x) + \dots \quad (\text{A.26})$$

on aura:

$$v'_\mu = v_\mu + \partial_\mu \alpha + i[\alpha, v_\mu] + i[\beta, a_\mu] \quad (\text{A.27})$$

$$a'_\mu = a_\mu + \partial_\mu \beta + i[\alpha, a_\mu] + i[\beta, v_\mu] \quad (\text{A.28})$$

$$s' = s + i[\alpha, s] - \{\beta, p\} \quad (\text{A.29})$$

$$p' = p + i[\alpha, p] + \{\beta, s\} \quad (\text{A.30})$$

On obtient alors la relation (où \mathcal{S} désigne v, a, s, p, θ):

$$\Gamma[\mathcal{S}'] = \Gamma[\mathcal{S}] + \Delta[\mathcal{S}, V_L V_R^\dagger], \quad (\text{A.31})$$

$$\Delta[\mathcal{S}, V_L V_R^\dagger] = - \int d^4x \langle \beta(x) \Omega(x) \rangle, \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned} \Omega(x) = & \frac{N_C}{16\pi^2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \left[v_{\alpha\beta} v_{\mu\nu} + \frac{4}{3} \nabla_\alpha a_\beta \nabla_\mu a_\nu \right. \\ & \left. + \frac{2i}{3} \{v_{\alpha\beta}, a_\mu a_\nu\} + \frac{8i}{3} a_\mu v_{\alpha\beta} a_\nu + \frac{4}{3} a_\alpha a_\beta a_\mu a_\nu \right], \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

$$v_{\mu\nu} = \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu - i[v_\mu, v_\nu], \quad (\text{A.34})$$

$$\nabla_\mu a_\nu = \partial_\mu a_\nu - i[v_\mu, a_\nu], \quad (\text{A.35})$$

à condition d'ajouter aux lois de transformation des sources externes (A.22)-(A.25), celle de l'angle du vide:

$$\theta'(x) = \theta(x) - 2\langle \beta(x) \rangle. \quad (\text{A.36})$$

Le terme Ω marque l'apparition d'anomalies dans la théorie. Puisque (A.31) doit être vérifiée pour toute transformation infinitésimale, nous pouvons écrire les identités de Ward sous la forme:

$$\begin{aligned} -\partial_\mu^x \frac{\delta\Gamma}{\delta v_\mu^a(x)} + f_{abc} v_\mu^c(x) \frac{\delta\Gamma}{\delta v_\mu^b(x)} + f_{abc} a_\mu^c(x) \frac{\delta\Gamma}{\delta a_\mu^b(x)} \\ + f_{abc} s^c(x) \frac{\delta\Gamma}{\delta s^b(x)} + f_{abc} p^c(x) \frac{\delta\Gamma}{\delta p^b(x)} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

pour $a = 0 \dots N_f^2 - 1$,

$$\begin{aligned} -\partial_\mu^x \frac{\delta\Gamma}{\delta a_\mu^a(x)} + f_{abc} v_\mu^c(x) \frac{\delta\Gamma}{\delta a_\mu^b(x)} + f_{abc} a_\mu^c(x) \frac{\delta\Gamma}{\delta v_\mu^b(x)} \\ - d_{abc} p^c(x) \frac{\delta\Gamma}{\delta s^b(x)} + d_{abc} s^c(x) \frac{\delta\Gamma}{\delta p^b(x)} = -\Omega^a(x), \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

pour $a = 1 \dots N_f^2 - 1$, et, en raison de la présence de θ pour β_0 ,

$$\begin{aligned} -\partial_\mu^x \frac{\delta\Gamma}{\delta a_\mu^0(x)} + \sqrt{\frac{2}{N_f}} \sum_{a=0 \dots N_f^2-1} \left[s^a(x) \frac{\delta\Gamma}{\delta p^a(x)} - p^a(x) \frac{\delta\Gamma}{\delta s^a(x)} \right] \\ - \sqrt{2N_f} \frac{\delta\Gamma}{\delta \theta(x)} = -\Omega^0(x), \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Pour obtenir une identité de Ward quelconque, il suffit de dériver un certain nombre de fois l'une de ces 3 relations par rapport aux sources externes,

puis de considérer l'égalité obtenue en $v = a = p = 0$, $s = M_q$, $\theta = \theta_0$. D'après la structure de Ω , les identités de Ward anormales sont de la forme $\partial_x^\mu \langle \Omega | T \{ A_\mu(x) X \} | \Omega \rangle$ avec: $X = VV, AA, VVV, AAV, VVVV, AAVV$ et $AAAA$. La non-conservation du courant axial singlet A_μ apparaît à travers la dérivée par rapport θ dans (A.39).

A.4 Lagrangien effectif pour deux saveurs

Pour $N_f = 2$, la construction du lagrangien effectif diffère légèrement du cas générique, car les représentations de $SU(2)$ sont pseudoréelles. En particulier, le corrélateur $\langle (\bar{u}u)(\bar{d}d) \rangle$, qui définit $\mathcal{Z}_S^{(2)}$, contient un invariant de type déterminant et perd son statut de paramètre d'ordre. L'ordre dominant du lagrangien généralisé¹ pour $SU(2)$ est [61]:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_2^{(2)} = & \frac{1}{4} \{ F^2(2) \langle D_\mu U^\dagger D^\mu U \rangle + 2\Sigma(2) \langle U^\dagger M + M^\dagger U \rangle \\ & + \mathcal{A}(2) \langle (U^\dagger M)^2 + (M^\dagger U)^2 \rangle + \mathcal{Z}_P(2) \langle U^\dagger M - M^\dagger U \rangle^2 \\ & + \mathcal{H}(2) \langle M^\dagger M \rangle + \mathcal{H}'(2) (\det M + \det M^\dagger) \} . \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Le nouveau contreterme $\mathcal{H}'(2)$ est compté $O(p^2)$ en $G\chi PT$, puisque $\det M$ comprend deux puissances de masse de quarks.

Malgré certaines ressemblances entre $\mathcal{H}'(2)$ et $\mathcal{H}(2)$ (termes sans champ de méson, absents des processus à basse énergie), $\mathcal{H}'(2)$ n'est pas nécessairement divergent. Il peut être défini à l'aide de la limite chirale du corrélateur (violant la règle de Zweig dans le secteur scalaire):

$$2i \int d^4x \, e^{ipx} \langle 0 | T \{ \bar{u}u(x) \bar{d}d(0) \} | 0 \rangle = \mathcal{H}''(2)(\mu) + O(p^2)_{G\chi PT}. \quad (\text{A.41})$$

Il est facile de voir dans la limite chirale que ni l'opérateur identité, ni le condensat de quarks, ni le condensat de gluons ne peuvent contribuer à l'Expansion en Produit d'Opérateurs de $\langle (\bar{u}u)(\bar{d}d) \rangle$. En effet, le condensat de quark apparaîtrait en compagnie d'une masse de quark (tendant vers 0 dans la limite chirale), tandis que la symétrie discrète $u_L \rightarrow -u_L$ disqualifie l'opérateur identité et le condensat de gluons. Le corrélateur (A.41) est donc dominé par des opérateurs de dimension 6, et il se comporte comme $O(1/p^4)$ à grande impulsion. Il est donc superconvergent. On peut relier $\mathcal{H}'(2)$ au spectre du secteur scalaire à l'aide d'une relation de dispersion sans soustraction, de manière analogue à la Sec. 4.4.2. Bien que cette intégrale soit difficile à estimer, $\mathcal{H}'(2)$ peut en principe être déterminée à partir de

1. La même analyse s'applique dans le cadre standard à l'ordre $O(p^4)$ avec L_6 .

données expérimentales dans le secteur 0^+ , en incluant non seulement les basses énergies, mais aussi les résonnances plus massives.

Puisque $\mathcal{H}'(2)$ ne contient pas de divergence ultraviolette, nous pouvons réécrire formellement l'ordre dominant généralisé du lagrangien à deux saveurs sous la forme générique $N_f \geq 3$. Nous utilisons pour cela l'identité, vraie pour toute matrice 2×2 : $\langle C \rangle^2 - \langle C^2 \rangle = 2 \det C$. Cela conduit à l'identification formelle:

$$F^2(N_f)A(N_f) \leftrightarrow \mathcal{A}(2) - \mathcal{H}'(2)/2, \quad (\text{A.42})$$

$$F^2(N_f)Z_S(N_f) \leftrightarrow \mathcal{H}'(2)/4, \quad (\text{A.43})$$

$$F^2(N_f)Z_P(N_f) \leftrightarrow \mathcal{Z}_P(2) + \mathcal{H}'(2)/4, \quad (\text{A.44})$$

$$F^2(N_f)H(N_f) \leftrightarrow \mathcal{H}(2), \quad (\text{A.45})$$

ce qui nous permet de traiter le lagrangien à deux saveurs dans le cadre générique, même si l'interprétation phénoménologique de ses paramètres est différente.

Annexe B

Spectre des mésons pseudoscalaires

B.1 Constantes de désintégration

Les constantes de désintégration sont données par [6, 62] :

$$F_\pi^2 = F_0^2 + 2m\xi + 2(2m + m_s)\tilde{\xi} + \frac{1}{16\pi^2} \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{F_0^2} X(3) \left[2 \log \frac{M_K^2}{M_\pi^2} + \log \frac{M_\eta^2}{M_K^2} \right] + \varepsilon_\pi, \quad (\text{B.1})$$

$$F_K^2 = F_0^2 + (m + m_s)\xi + 2(2m + m_s)\tilde{\xi} + \frac{1}{2} \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{F_0^2} X(3) L + \varepsilon_K, \quad (\text{B.2})$$

$$F_\eta^2 = F_0^2 + \frac{2}{3}(m + 2m_s)\xi + 2(2m + m_s)\tilde{\xi} + \frac{1}{48\pi^2} \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{F_0^2} (2r + 1) X(3) \log \frac{M_\eta^2}{M_K^2} + \varepsilon_\eta, \quad (\text{B.3})$$

avec les constantes effectives indépendantes d'échelle:

$$\xi = F_0^2 \xi(\mu) - \frac{B_0}{32\pi^2} \left(\log \frac{M_K^2}{\mu^2} + 2 \log \frac{M_\eta^2}{\mu^2} \right) \quad (\text{B.4})$$

$$= 8B_0 \left[L_5(\mu) - \frac{1}{256\pi^2} \left(\log \frac{M_K^2}{\mu^2} + 2 \log \frac{M_\eta^2}{\mu^2} \right) \right], \quad (\text{B.5})$$

$$\tilde{\xi} = F_0^2 \tilde{\xi}(\mu) - \frac{B_0}{32\pi^2} \log \frac{M_K^2}{\mu^2} \quad (\text{B.6})$$

$$= 8B_0 \left[L_4(\mu) - \frac{1}{256\pi^2} \log \frac{M_K^2}{\mu^2} \right], \quad (\text{B.7})$$

et:

$$L = \frac{1}{32\pi^2} \left[3 \log \frac{M_K^2}{M_\pi^2} + \log \frac{M_\eta^2}{M_K^2} \right]. \quad (\text{B.8})$$

Les contributions d'ordre supérieur sont rassemblées dans $\delta_2 F_P^2$.

Les constantes effectives sont reliées à F_0 par les relations:

$$\begin{aligned} m_s \xi &= \frac{r}{r-1} \left\{ F_K^2 - F_\pi^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{64\pi^2} \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{F_0^2} X(3) \left[5 \log \frac{M_K^2}{M_\pi^2} + 3 \log \frac{M_\eta^2}{M_K^2} \right] \right\} \\ &\quad + \frac{r}{r-1} [\varepsilon_\pi - \varepsilon_K], \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} m_s \tilde{\xi} &= \frac{r}{2(r+2)} \left\{ \frac{r+1}{r-1} F_\pi^2 - \frac{2}{r-1} F_K^2 - F_0^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{32\pi^2} \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{F_0^2} X(3) \left[\frac{4r+1}{r-1} \log \frac{M_K^2}{M_\pi^2} + \frac{2r+1}{r-1} \log \frac{M_\eta^2}{M_K^2} \right] \right\} \\ &\quad + \frac{r}{2(r+2)} \left[\frac{2}{r-1} \varepsilon_K - \frac{r+1}{r-1} \varepsilon_\pi \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Les constantes de désintégrations satisfont une relation de type Gell-Mann-Okubo:

$$\begin{aligned} F_\eta^2 &= \frac{4}{3} F_K^2 - \frac{1}{3} F_\pi^2 + \frac{1}{24\pi^2} \frac{M_\pi^2 F_\pi^2}{F_0^2} r X(3) \log \frac{M_\eta^2}{M_K^2} \\ &\quad + \frac{1}{48\pi^2} \frac{M_\pi^2 F_\pi^2}{F_0^2} X(3) \left(\log \frac{M_\eta^2}{M_K^2} - \log \frac{M_K^2}{M_\pi^2} \right) \\ &\quad + \varepsilon_\eta - \frac{4}{3} \varepsilon_K + \frac{1}{3} \varepsilon_\pi. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

B.2 Masses

Les masses des pseudoscalaires sont données par [6, 62]:

$$\begin{aligned} F_\pi^2 M_\pi^2 &= 2m\Sigma + (2mm_s + 4m^2)Z^S + 4m^2 A \\ &\quad + \frac{F_\pi^4 M_\pi^4}{F_0^4} [X(3)]^2 L + F_\pi^2 \delta_\pi, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} F_K^2 M_K^2 &= (m_s + m)\Sigma + (m_s + m)(m_s + 2m)Z^S + (m_s + m)^2 A \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{F_\pi^4 M_\pi^4}{F_0^4} (r+1) [X(3)]^2 L + F_K^2 \delta_K, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned}
F_\eta^2 M_\eta^2 &= \frac{2}{3}(2m_s + m)\Sigma + \frac{2}{3}(2m_s + m)(m_s + 2m)Z^S \\
&\quad + \frac{4}{3}(2m_s^2 + m^2)A + \frac{8}{3}(m_s - m)^2 Z^P \\
&\quad + \frac{1}{3} \frac{F_\pi^4 M_\pi^4}{F_0^4} [X(3)]^2 L + F_\eta^2 \delta_\eta.
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Ces formules font intervenir les paramètres effectifs indépendants d'échelle:

$$Z^S = 2F_0^2 Z_0^S(\mu) - \frac{B_0^2}{32\pi^2} \left\{ 2 \log \frac{M_K^2}{\mu^2} + \frac{4}{9} \log \frac{M_\eta^2}{\mu^2} \right\} \tag{B.15}$$

$$= 32B_0^2 \left[L_6(\mu) - \frac{1}{512\pi^2} \left\{ \log \frac{M_K^2}{\mu^2} + \frac{2}{9} \log \frac{M_\eta^2}{\mu^2} \right\} \right], \tag{B.16}$$

$$A = F_0^2 A_0(\mu) - \frac{B_0^2}{32\pi^2} \left\{ \log \frac{M_K^2}{\mu^2} + \frac{2}{3} \log \frac{M_\eta^2}{\mu^2} \right\} \tag{B.17}$$

$$= 16B_0^2 \left[L_8(\mu) - \frac{1}{512\pi^2} \left\{ \log \frac{M_K^2}{\mu^2} + \frac{2}{3} \log \frac{M_\eta^2}{\mu^2} \right\} \right], \tag{B.18}$$

$$Z^P = F_0^2 Z_0^P = 16B_0^2 L_7. \tag{B.19}$$

On note le reste des contributions d'ordre supérieur δM_P^2 .

On peut estimer les constantes effectives à l'aide des relations:

$$m_s^2 Z^S = F_\pi^2 M_\pi^2 \frac{r^2}{2(r+2)} \tag{B.20}$$

$$\begin{aligned}
&\times \left\{ 1 - \tilde{\epsilon}(r) - X(3) - \frac{1}{32\pi^2} \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{F_0^4} \frac{r[X(3)]^2}{r-1} L \right\} \\
&+ \frac{r^2}{2(r+2)} \left[\frac{4}{r^2-1} F_K^2 \delta_K - \frac{r+1}{r-1} F_\pi^2 \delta_\pi \right],
\end{aligned}$$

$$m_s^2 A = F_\pi^2 M_\pi^2 \frac{r^2}{4} \left\{ \tilde{\epsilon}(r) + \frac{1}{32\pi^2} \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{F_0^4} \frac{[X(3)]^2}{r-1} L \right\} \tag{B.21}$$

$$+ \frac{r^2}{2(r-1)} F_\pi^2 \delta_\pi - \frac{r^2}{r^2-1} F_K^2 \delta_K,$$

$$\begin{aligned}
m_s^2 Z^P &= \frac{r^2}{8} \left\{ \frac{1}{(r-1)^2} [3F_\eta^2 M_\eta^2 + F_\pi^2 M_\pi^2 - 4F_K^2 M_K^2] - F_\pi^2 M_\pi^2 \tilde{\epsilon}(r) \right\} \\
&- \frac{r^2}{8(r-1)^2} \left[3F_\eta^2 \delta_\eta + \frac{8r}{r+1} F_K^2 \delta_K + (2r-1)F_\pi^2 \delta_\pi \right], \tag{B.22}
\end{aligned}$$

avec:

$$\tilde{\epsilon}(r) = 2 \frac{\tilde{r}_2 - r}{r^2 - 1} \quad \tilde{r}_2 = 2 \frac{F_K^2 M_K^2}{F_\pi^2 M_\pi^2} - 1. \tag{B.23}$$

B.3 Masses des pseudoscalaires pour $m \rightarrow 0$

On peut donc obtenir tous les éléments désirés en ajoutant aux données (masses des pseudoscalaires, F_π et F_K) trois paramètres : r , $X(3)$ et F_0 .

$$\begin{aligned} F_\pi, F_K &\rightarrow F_\eta, m_s \xi, m_s \tilde{\xi} &\rightarrow \bar{F}_\pi, \bar{F}_K, \bar{F}_\eta \\ M_\pi, M_K, M_\eta &\rightarrow m_s^2 Z^S, m_s^2 A, m_s^2 Z^P &\rightarrow \bar{M}_K, \bar{M}_\eta \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Lorsque nous nous placerons dans la limite chirale $m \rightarrow 0$, il faudra connaître les constantes effectives correspondantes :

$$\lim_{m \rightarrow 0} X_i = X_i + \sum_P C_P \cdot \log \frac{\bar{M}_P^2}{M_P^2}. \quad (\text{B.25})$$

Pour calculer \bar{M}_P dans cette expression, on prend la limite chirale des expansions des masses (B.12)-(B.14). Mais ces expansions font intervenir les constantes effectives à $m = 0$, ce qui donne lieu à des corrections contenant des logarithmes de \bar{M}_Q/M_Q :

$$\bar{M}_P = \sum_i a_i X_i + \sum_Q D_Q \cdot \log \frac{\bar{M}_Q^2}{M_Q^2}. \quad (\text{B.26})$$

Les équations (B.26) pourraient se résoudre itérativement. En fait, \bar{M}_Q/M_Q est toujours très proche de 1. On peut donc simplifier le calcul (sans altérer sa précision), en calculant d'une manière un peu différente \bar{M}_Q dans les logarithmes de (B.26). Pour cela, on part de (B.26), mais on néglige le second terme, logarithmique :

$$\bar{M}_Q = \sum_i a_i X_i. \quad (\text{B.27})$$

Cela permet de calculer \bar{M}_Q directement en terme des observables et de $F_0, r, X(3)$. On place les valeurs de \bar{M}_Q ainsi obtenues dans les logarithmes de (B.26). Nous aboutissons ainsi à des valeurs de \bar{M}_P très proches de celles obtenues par résolution itératives. Ce sont ces valeurs de \bar{M}_P que nous utilisons pour calculer $X_i|_{m=0}$.

Annexe C

Théorème à basse énergie

C.1 Expansion en produits d'opérateurs de Π

C.1.1 Intégrales contribuant au coefficient de Wilson

Six intégrales peuvent contribuer au coefficient de Wilson de $m_s \langle \bar{u}u \rangle$ et sont représentés sur la Fig. 4.2). Sur chaque ligne, on passe du diagramme de gauche au diagramme de droite (et vice-versa) par croisement des lignes gluoniques. Si on effectue un changement de variable simple sur les intégrales correspondantes, on voit immédiatement que la contribution des deux diagrammes sur une même ligne est identique.

Les 2 diagrammes de la première ligne donnent chacun une intégrale de la forme:

$$\begin{aligned} & \frac{m m_s}{M_\pi^2 M_K^2} \frac{16 m_s g^4 \langle \bar{u}u \rangle}{p^2 - m_0^2} \int \frac{d^d q \, d^d k}{(2\pi)^{2d}} \\ & \times \frac{1}{[q^2 - m_0^2]^2 [(p - q)^2 - m_0^2] [k^2 - m_s^2] [(k + q)^2 - m_s^2] [(k + p)^2 - m_s^2]} \\ & \times \left\{ 2(p \cdot k)[q \cdot (k + q)] + 2(q \cdot k)[p \cdot (k + q)] + (d - 4)(p \cdot q)[k \cdot (k + q)] \right. \\ & \quad + 2[p \cdot (k + p)][q \cdot (k + q)] + 2[p \cdot (k + q)][q \cdot (k + p)] \\ & \quad + (d - 4)(p \cdot q)[(k + p) \cdot (k + q)] \\ & \quad \left. + (2 - d)(p \cdot q)[k \cdot (k + p)] + m_s^2(2 - d)(p \cdot q) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Les deux diagrammes de la seconde ligne donnent:

$$\begin{aligned} & \frac{m m_s}{M_\pi^2 M_K^2} \frac{16 m_s g^4 \langle \bar{u}u \rangle}{p^2 - m_0^2} \int \frac{d^d q \, d^d k}{(2\pi)^{2d}} \\ & \times \frac{1}{[q^2 - m_0^2]^2 [(p - q)^2 - m_0^2] [k^2 - m_s^2] [(k + q)^2 - m_s^2] [(k + p)^2 - m_s^2]} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ 2(p \cdot k)[q \cdot (k + q)] + 2(q \cdot k)[p \cdot (k + q)] + (d - 4)(p \cdot q)[k \cdot (k + q)] \right. \\
& \quad + 2[p \cdot (k + p)][q \cdot (k + q)] + 2[p \cdot (k + q)][q \cdot (k + p)] \\
& \quad + (d - 4)(p \cdot q)[(k + p) \cdot (k + q)] \\
& \quad \left. - (2 - d)(p \cdot q)[k \cdot (k + p)] + m_s^2(2 - d)(p \cdot q) \right\}.
\end{aligned}$$

La troisième ligne contribue, pour chaque diagramme, comme :

$$\begin{aligned}
& -\frac{mm_s}{M_\pi^2 M_K^2} 16m_s g^4 \langle \bar{u}u \rangle \int \frac{d^d q \, d^d k}{(2\pi)^{2d}} \quad (C.3) \\
& \times \frac{1}{[q^2 - m_0^2]^2 [(p - q)^2 - m_0^2]^2 [k^2 - m_s^2] [(k + q)^2 - m_s^2] [(k + p)^2 - m_s^2]} \\
& \times \left\{ (2 - d)[(p - q) \cdot q][(k + p) \cdot (k + q)] + (2 - d)[(p - q) \cdot q][k \cdot (k + q)] \right. \\
& \quad + 2[(p - q) \cdot (k + p)](k \cdot q) - 2[(p - q) \cdot k][q \cdot (k + p)] \\
& \quad \left. + d[q \cdot (p - q)][k \cdot (k + p)] - m_s^2 d[q \cdot (p - q)] \right\}.
\end{aligned}$$

C.1.2 Expansion asymptotique

On veut donc considérer le comportement à grand p^2 d'intégrales de la forme :

$$\begin{aligned}
J(\{\nu_i\}, \{m_i\}, p) &= \int \frac{d^4 q \, d^4 k}{[q^2 - m_1^2]^{\nu_1} [k^2 - m_2^2]^{\nu_2}} \quad (C.4) \\
&\times \frac{1}{[(k + q)^2 - m_3^2]^{\nu_3} [(p - q)^2 - m_4^2]^{\nu_4} [(k + p)^2 - m_5^2]^{\nu_5}}.
\end{aligned}$$

Ces intégrales sont formellement identiques aux intégrales mises en jeu dans le calcul de *self-energies* à deux boucles, voir Fig. C.1.

Le comportement de telles intégrales à grand moment extérieur a déjà été étudié : l'idée de base est de suivre le flux de ce grand moment extérieur à travers le diagramme de Feynman, afin de procéder à l'expansion de Taylor des propagateurs de manière judicieuse [67]. Cette procédure s'appuie sur le théorème d'expansion asymptotique [68] :

$$J_\Gamma \underset{p^2 \rightarrow \infty}{\sim} \sum_\gamma J_{\Gamma/\gamma} \circ \mathcal{T}_{\{m_i\}, \{q_i\}} J_\gamma. \quad (C.5)$$

Γ désigne le graphe tout entier et les γ sont les sous-graphes pris en compte dans l'expansion asymptotique (voir ci-dessous). Γ/γ est le graphe complémentaire de γ , obtenu en réduisant toutes les lignes de γ à un point. J_γ est l'intégrale de Feynman (régularisée dimensionnellement) qui correspond

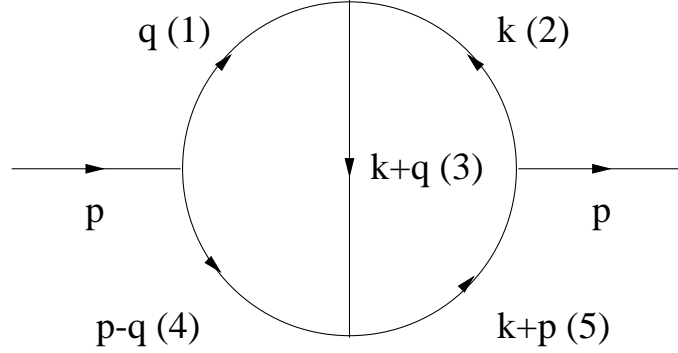


FIG. C.1 – Diagramme de type “self-energy”, correspondant formellement aux intégrales mises en jeu lors de l’OPE de Π à l’ordre le plus bas.

au graphe γ . $\mathcal{T}_{\{m_i\},\{q_i\}}$ est l’opérateur qui procède à l’expansion de Taylor de l’intégrand en puissances des masses m_i et des “petites” impulsions q_i (i.e. externes au sous-graphe γ mais ne contenant pas p). \circ indique que le polynôme obtenu après expansion de Taylor doit être inséré dans l’intégrale J_γ . On procède d’abord à l’expansion de Taylor avant d’intégrer sur les impulsions internes.

Aux sous-graphes γ de la Fig. C.2 sont respectivement associés des graphes réduits Γ/γ correspondant (1) au graphe trivial, (2-3) à un tadpole, (4) au produit de deux tadpoles, (5) à un graphe à deux boucles.

L’opérateur d’expansion de Taylor \mathcal{T} s’applique sur les propagateurs de la manière suivante:

$$\mathcal{T}_m \frac{1}{[k^2 - m^2]^\nu} = \frac{1}{k^{2\nu}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{\Gamma(\nu + j)}{\Gamma(\nu)} \left[\frac{m^2}{k^2} \right]^j \quad (\text{C.6})$$

$$\mathcal{T}_{m;q} \frac{1}{[(p - q)^2 - m^2]^\nu} = \frac{1}{p^{2\nu}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{\Gamma(\nu + j)}{\Gamma(\nu)} \left[\frac{2(p \cdot q) - q^2 + m^2}{p^2} \right]^j \quad (\text{C.7})$$

Une fois le développement de Taylor effectué, on procède à l’intégration sur les impulsions internes. Les puissances de q sont alors converties en puissances des masses. Ainsi, dans (C.7), la j -ième puissance de $[2(p \cdot q) - q^2 + m^2]/p^2$ donnera, une fois intégrée, une contribution d’ordre $(m^2/p^2)^j$.

Considérons les différents types d’intégrales de la Fig. C.2:

1. Le sous-graphe γ est le graphe complet Γ . Tous les dénominateurs doivent être développés en puissances des masses:

$$\mathcal{T}_{\{m_i\}} J(\{\nu_i\}, \{m_i\}, p) = \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^5 \frac{m_i^{j_i}}{j_i!} \frac{\Gamma(\nu_i + j_i)}{\Gamma(\nu_i)} \right] J(\{\nu_i + j_i\}, \{0\}, p)$$

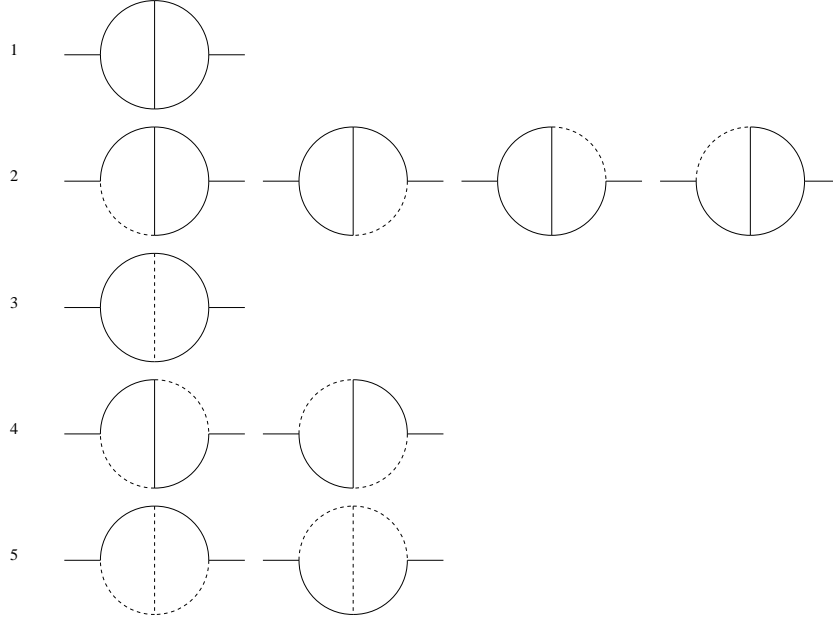


FIG. C.2 – *Sous-graphes intervenant dans l'expansion asymptotique des intégrales. Les sous-graphes sont constitués des lignes en traits pleins, les tirets indiquent les propagateurs exclus.*

$$= J(\{\nu\}, \{0\}, p) + \dots \quad (\text{C.8})$$

Les points de suspension désignent des contributions supprimées par un facteur $1/p^2$. L'expression des intégrales à masse nulle $J(\{\nu\}, \{0\}, p)$ est rappelée en Sec. C.1.3.

2. Prenons pour γ , le graphe complet Γ privé de la ligne 1 (cf. Fig. C.1). On associe à ce graphe la contribution:

$$\int \frac{d^d q}{[q^2 - m_1^2]^{\nu_1}} \mathcal{T}_{m_2 \dots m_5; q} \left[\int d^d k \frac{1}{[k^2 - m_2^2]^{\nu_2}} \right. \quad (\text{C.9})$$

$$\left. \times \frac{1}{[(k+q)^2 - m_3^2]^{\nu_3} [(p-q)^2 - m_4^2]^{\nu_4} [(k+p)^2 - m_5^2]^{\nu_5}} \right].$$

Une fois le développement de Taylor effectué, on doit calculer des intégrales à deux boucles à masse nulle I , et des tadpoles massifs K (voir Sec. C.1.3). La contribution de (C.9) est à l'ordre dominant en $1/p^2$:

$$\frac{1}{p^{2\nu_4}} K(\nu_1, m_1) I^{(0)}(\nu_2 + \nu_3, \nu_5, p) + \dots \quad (\text{C.10})$$

3. γ est le graphe complet Γ privé de la ligne centrale (cf. Fig. C.1). On associe à ce graphe la contribution:

$$\int \frac{d^d k}{[k^2 - m_3^2]^{\nu_3}} \mathcal{T}_{m_1, m_2, m_4, m_5; k} \left[\int d^d q \frac{1}{[(k + p - q)^2 - m_1^2]^{\nu_1}} \right. \\ \left. \times \frac{1}{[(p - q)^2 - m_2]^{\nu_2} [(k - q)^2 - m_4^2]^{\nu_4} [q^2 - m_5]^{\nu_5}} \right]. \quad (\text{C.11})$$

On obtient le même type d'intégrale que dans le cas précédent. L'ordre dominant en $1/p^2$ est:

$$K(\nu_3, m_3) I^{(0)}(\nu_1 + \nu_2, \nu_3 + \nu_4, q). \quad (\text{C.12})$$

4. Le premier graphe de type (4) donne la contribution suivante:

$$\int \frac{d^d k}{[k^2 - m_1^2]^{\nu_1}} \frac{d^d q}{[q^2 - m_5^2]^{\nu_5}} \quad (\text{C.13}) \\ \times \mathcal{T}_{m_2, m_3, m_4; k, q} \left[\frac{1}{[(p - q)^2 - m_2^2]^{\nu_2} [(p - k - q)^2 - m_3]^{\nu_3} [(p - k)^2 - m_4^2]^{\nu_4}} \right].$$

Après expansion, on obtient des produits de tadpoles à une boucle. A l'ordre le plus bas en $1/p^2$, ce sera:

$$\frac{1}{p^{2(\nu_2 + \nu_3 + \nu_4)}} K(\nu_1, m_1) K(\nu_5, m_5). \quad (\text{C.14})$$

5. On obtient alors des intégrales non-triviales à deux boucles. Par exemple, le premier graphe de type (5) donne:

$$\int \frac{d^d k d^d q}{[k^2 - m_1^2]^{\nu_1} [q^2 - m_2^2]^{\nu_2} [(k - q)^2 - m_3^2]^{\nu_3}} \quad (\text{C.15})$$

$$\times \mathcal{T}_{m_4, m_5; k, q} \left[\frac{1}{[(p - k)^2 - m_4^2]^{\nu_4} [(p - q)^2 - m_5^2]^{\nu_5}} \right]. \quad (\text{C.16})$$

Au premier ordre en $1/p^2$, ce sera:

$$\frac{1}{p^{2(\nu_4 + \nu_5)}} L(\nu_1, \nu_2, \nu_3, m_1, m_2, m_3). \quad (\text{C.17})$$

où L , intégrale à deux boucles, est définie dans la Sec. C.1.3.

Il est facile de suivre le comportement asymptotique des différentes contributions. Nous cherchons l'ordre dominant en $1/p^2$ du coefficient de Wilson. Or les contributions des sous-diagrammes ne débutent pas toutes pour la

même puissance de $1/p^2$. Nous pouvons nous restreindre à l'ordre dominant en $1/p^2$ des sous-diagrammes dominants. En particulier, les diagrammes de type 5 n'interviennent pas au premier ordre en $1/p^2$ du coefficient de Wilson.

On obtient finalement:

$$\Pi(p^2) \underset{p^2 \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\alpha_s^2 m_s^2}{M_\pi^2 M_K^2} \frac{2}{\pi^2 p^2} \{[5 - 6\zeta(3)] + [5 - 6\zeta(3)] - [1 + 6\zeta(3)]\}, \quad (\text{C.18})$$

où les termes entre crochets correspondent respectivement aux contributions des première, deuxième et troisième lignes de la Fig. 4.2.

C.1.3 Formulaire

Intégrales à une boucle à masse nulle

On considère l'intégrale à une boucle à masse nulle:

$$\begin{aligned} I^{(0)}(\nu_1, \nu_2, p) &= \int \frac{d^d k}{k^{2\nu_1} [p - k]^{2\nu_2}} \\ &= i\pi^{d/2} (-1)^{\nu_1 + \nu_2} (-p^2)^{d/2 - \nu_1 - \nu_2} \frac{\Gamma(d/2 - \nu_1) \Gamma(d/2 - \nu_2) \Gamma(\nu_1 + \nu_2 - d/2)}{\Gamma(\nu_1) \Gamma(\nu_2) \Gamma(d - \nu_1 - \nu_2)}. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

En dérivant par rapport à p_μ , on obtient l'intégrale:

$$\begin{aligned} \int d^d k \frac{k_\mu}{k^{2\nu_1} [p - k]^{2\nu_2}} &= i\pi^{d/2} (-1)^{\nu_1 + \nu_2} (-p^2)^{d/2 - \nu_1 - \nu_2} p_\mu \\ &\quad \times \frac{\Gamma(d/2 + 1 - \nu_1) \Gamma(d/2 - \nu_2) \Gamma(\nu_1 + \nu_2 - d/2)}{\Gamma(\nu_1) \Gamma(\nu_2) \Gamma(d + 1 - \nu_1 - \nu_2)}. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Intégrales à deux boucles à masse nulle

L'intégrale à deux boucles à masse nulle est:

$$J^{(0)}(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5) = J(\{\nu_i\}, \{0\}, p). \quad (\text{C.21})$$

On a l'invariance sous les permutations:

$$J^{(0)}(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5) = J^{(0)}(\nu_2, \nu_1, \nu_3, \nu_5, \nu_4) = J^{(0)}(\nu_4, \nu_5, \nu_3, \nu_1, \nu_2). \quad (\text{C.22})$$

Si un ν est négatif, on peut utiliser les formules d'intégration à une boucle (C.19)-(C.20) pour calculer immédiatement l'intégrale. Si tous les ν_i sont des

entiers positifs ou nuls, on peut utiliser la formule de récurrence suivante (obtenue à l'aide d'intégrations par parties) [103]:

$$\begin{aligned} & (\nu_1 + 2\nu_3 + \nu_4 - d)J^{(0)}(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5) \\ &= \nu_1 [J^{(0)}(\nu_1 + 1, \nu_2 - 1, \nu_3, \nu_4, \nu_5) - J^{(0)}(\nu_1 + 1, \nu_2, \nu_3 - 1, \nu_4, \nu_5)] \\ &+ \nu_4 [J^{(0)}(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 + 1, \nu_5 - 1) - J^{(0)}(\nu_1, \nu_2, \nu_3 - 1, \nu_4 + 1, \nu_5)] , \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

pour se ramener aux cas triviaux:

$$J^{(0)}(\nu_1, \nu_2, 0, \nu_4, \nu_5) = I^{(0)}(\nu_1, \nu_4, p)I^{(0)}(\nu_2, \nu_5, p) \quad (\text{C.24})$$

$$\begin{aligned} J^{(0)}(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, 0) &= \pi^n (-1)^{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + 1} (-p^2)^{d - \nu_1 - \nu_2 - \nu_3 - \nu_4} \\ &\times \frac{\Gamma(d/2 - \nu_2)\Gamma(d/2 - \nu_3)\Gamma(\nu_2 + \nu_3 - d/2)}{\Gamma(\nu_2)\Gamma(\nu_3)\Gamma(d - \nu_2 - \nu_3)} \\ &\times \frac{\Gamma(d - \nu_1 - \nu_2 - \nu_3)\Gamma(d/2 - \nu_4)\Gamma(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 - d)}{\Gamma(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 - d/2)\Gamma(\nu_4)\Gamma(3d/2 - \nu_1 - \nu_2 - \nu_3 - \nu_4)}. \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

Remarquons que $J^{(0)}$ se comporte asymptotiquement comme $(-p^2)^{d-2\Sigma}$ avec $\Sigma = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5$. On obtient par exemple:

$$J^{(0)}(1, 1, 1, 1, 1) = \frac{\pi^4}{(-p^2)} 6\zeta(3) + O(\omega). \quad (\text{C.26})$$

avec $d = 4 - 2\omega$ et ζ la fonction de Riemann:

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}, \quad \zeta(3) = 1.202 \dots \quad (\text{C.27})$$

$(1, 1, 1, 1, 1)$ est le seul quintuplet positif pour lequel $J^{(0)}$ contient $\zeta(3)$ [67].

Intégrales massives

Le tadpole massif à une boucle s'écrit:

$$K(\nu, m) = \int \frac{d^d p}{[p^2 - m^2]^\nu} = i\pi^{d/2} (-1)^\nu m^{2\nu} \frac{\Gamma(\nu - d/2)}{\Gamma(\nu)}. \quad (\text{C.28})$$

On voit apparaître également les intégrales massives à deux boucles:

$$L(\nu_1, \nu_2, \nu_3; m_1, m_2, m_3) = \iint \frac{d^d k d^d q}{[k^2 - m_1^2]^{\nu_1} [q^2 - m_2^2]^{\nu_2} [(k - q)^2 - m_3^2]^{\nu_3}}, \quad (\text{C.29})$$

dont la forme analytique est connue pour certaines valeurs de $\{\nu_i\}$ [104]. Elles ne contribuent pas au terme que nous recherchons.

C.2 Equations d'Omnès-Muskhelishvili

Pour résoudre numériquement les équations d'Omnès-Muskhelishvili (4.16), il est utile de les réécrire pour la partie réelle du facteur de forme $R(s) = \text{Re}[\vec{F}(s)]$:

$$R(s) = \frac{1}{\pi} \int_{4M_\pi^2}^{\infty} ds' \frac{1}{s' - s} X(s') R(s'), \quad (\text{C.30})$$

avec la matrice: $X = i[\mathbf{1} - (\mathbf{1} - iT^*\Sigma)^{-1}](s)$. Si nous savons résoudre numériquement (C.30), nous pourrions utiliser (4.15) pour déduire $\vec{F}(s)$ de $R(s)$.

Pour calculer une telle intégrale, on commence par découper l'intervalle d'intégration en n sous-intervalles (6 dans le cas présent), dans lesquels on effectue un changement de variable pour se ramener à $[-1, 1]$:

$$\int_a^b ds' \frac{1}{s' - s} \mathcal{X}(s') = \int_{-1}^1 du' \frac{1}{u' - u} \mathcal{X}\left(\frac{1}{2}[a + b + (b - a)u']\right), \quad (\text{C.31})$$

$$\int_a^{\infty} ds' \frac{1}{s' - s} \mathcal{X}(s') = \frac{2a}{s} \int_{-1}^1 du' \frac{1}{u' - u} \left\{ \frac{1}{1 - u'} \mathcal{X}\left(\frac{2a}{1 - u'}\right) \right\} \quad (\text{C.32})$$

Il s'agit donc de calculer l'intégrale sur $[-1, 1]$ de $\mathcal{Y}(u')/(u' - u)$. On va projeter \mathcal{Y} sur la base des polynômes de Legendre $\{P_n\}$ [101] orthogonaux pour le produit scalaire dans l'espace des fonctions de $[-1, 1]$ à valeurs réelles: $(h, k) = \int_{-1}^1 dx h(x)k(x)$. On a les relations:

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad (\text{C.33})$$

$$(P_m, P_n) = \delta_{mn} \frac{2}{2n + 1}, \quad \deg P_n = n. \quad (\text{C.34})$$

La projection de \mathcal{Y} sur cette base est:

$$\mathcal{Y}(u') = \sum_{n=0}^{\infty} y_n P_n(u'), \quad y_n = \frac{2n + 1}{2} \int_{-1}^1 du' \mathcal{Y}(u') P_n(u'). \quad (\text{C.35})$$

On peut introduire les polynômes de Legendre du second type $Q_n(x)$ [101]:

$$\int_{-1}^1 du \frac{P_n(u)}{z - u} = 2Q_n(z), \quad \int_{-1}^1 du' \frac{1}{u' - u} \mathcal{Y}(u') = -2 \sum_{n=0}^{\infty} y_n Q_n(u), \quad (\text{C.36})$$

tandis que les coefficients y_n peuvent se calculer par quadrature de Gauss-Legendre [102]:

$$y_n = \frac{2n + 1}{2} \int_{-1}^1 du' \mathcal{Y}(u') P_n(u') \rightarrow \frac{2n + 1}{2} \sum_{i=1}^N w_i \mathcal{Y}(u_i) P_n(u_i), \quad (\text{C.37})$$

où $\{u_i\}$ sont les N points d'intégration de Gauss-Legendre (i.e. les N zéros de P_N), et $\{w_i\}$ sont les poids associés. N peut être arbitrairement choisi.

On aboutit donc aux valeurs approchées des intégrales:

$$\int_a^b ds' \frac{1}{s' - s} X(s') R(s') \rightarrow \sum_{i=1}^N W_i \left[1 + 2 \frac{s-b}{b-a} \right] X(s_i) R(s_i), \quad (\text{C.38})$$

$$s_i = \frac{1}{2} [a + b + (b-a)u_i],$$

$$\int_a^\infty ds' \frac{1}{s' - s} X(s') R(s') \rightarrow \frac{1}{s} \sum_{i=1}^N W_i \left[1 - 2 \frac{a}{s} \right] s_i X(s_i) R(s_i), \quad (\text{C.39})$$

$$s_i = \frac{2a}{1 - u_i},$$

avec les poids:

$$W_i[z] = -w_i \sum_{j=0}^{N-1} (2j+1) P_j(u_i) Q_j(z). \quad (\text{C.40})$$

P_N ne contribue pas aux W_i , car $P_N(u_i) = 0$, et on a négligé les contributions des polynômes de Legendre de degré supérieur à N . Grâce à la relation de recurrence (C.33), il est possible de réécrire $W_i[z] = -w_i[1 - (N+1)P_{N+1}(u_i)Q_N(z)]/(z - u_i)$.

On peut donc évaluer numériquement le membre de droite de (C.30) si on connaît la valeur de R aux N points d'intégration de Gauss-Legendre $\{s_i^{(k)}\}$ dans chacun des n sous-intervalles d'intégration ($i = 1 \dots N$, $k = 1 \dots n$). On considère alors (C.30) en chacun des points $s = s_i$: l'ensemble des $M = nN$ équations correspondantes consitue un système linéaire dont les inconnues sont $R(s_i^{(k)})$.

Ce système est homogène: il admet des solutions non-triviales à condition que le déterminant soit strictement nul, ce qui n'aurait lieu que pour $N \rightarrow \infty$. De plus, nous spécifions la valeur en zéro des facteurs de forme, ce qui engendre une équation supplémentaire, non-homogène, pour $R(s_i^{(k)})$, provenant de (C.30) pour $s = 0$.

Pour résoudre ce système surdéterminé (mais "presque" déterminé), on élimine la dernière équation homogène (qui concerne $R(s_N^{(n)})$), puis on procède à la décomposition en valeur singulière de la matrice $M \times M$ correspondante [102]. Cette méthode est souvent exploitée pour résoudre des problèmes de moindres carrés. Elle se base sur un théorème classique d'algèbre linéaire: toute matrice A de taille $N \times N$ peut se décomposer comme $A = U W V^T$, avec U et V deux matrice $N \times N$ orthogonales, et W une matrice diagonale

d'éléments diagonaux positifs ou nuls $\{w_1, \dots, w_n\}$, et V une matrice orthogonale $N \times N$. Cette décomposition est toujours possible, et unique à des permutations triviales près. La solution par la méthode des moindres carrés du système $A \cdot X = B$, avec les N -vecteurs X et B sera alors donné par: $X = VW^{-1}U^T B$. Ce sera la solution satisfaisant au mieux l'ensemble des équations (i.e. minimisant $|AX - B|$)¹.

Une fois le système résolu, nous connaissons R , et donc \vec{F} , en tous les points d'intégration de Gauss-Legendre $\{s_i^{(k)}\}$. Le même raisonnement s'applique à \vec{G} , ce qui permet d'estimer la fonction spectrale $\text{Im } \Pi(s)$ en chacun de ces points. Il est alors immédiat de calculer des intégrales de cette fonction spectrale par de quadrature de Gauss-Legendre.

C.3 Dérivées logarithmiques

Pour calculer les dérivées logarithmiques γ_P et λ_P :

$$\gamma_P = \frac{m}{M_P^2} \left(\frac{\partial M_P^2}{\partial m} \right)_{m=0}, \quad \lambda_P = \frac{m_s}{M_P^2} \left(\frac{\partial M_P^2}{\partial m_s} \right)_{m=0}, \quad (\text{C.41})$$

on utilise les relations:

$$\gamma_P = \frac{m}{\bar{F}_P^2 M_P^2} \left(\frac{\partial [F_P^2 M_P^2]}{\partial m} \right)_{m=0} - \frac{\bar{M}_P^2}{M_P^2} \cdot \frac{m}{\bar{F}_P^2} \left(\frac{\partial F_P^2}{\partial m} \right)_{m=0}, \quad (\text{C.42})$$

$$\lambda_P = \frac{m_s}{\bar{F}_P^2 M_P^2} \frac{\partial [\bar{F}_P^2 \bar{M}_P^2]}{\partial m_s} - \frac{\bar{M}_P^2}{M_P^2} \cdot \frac{m_s}{\bar{F}_P^2} \frac{\partial \bar{F}_P^2}{\partial m_s}, \quad (\text{C.43})$$

où $\bar{X} = \lim_{m \rightarrow 0} X$.

Les γ_P sont donc donnés par:

$$\begin{aligned} \gamma_\pi = \frac{1}{\bar{F}_\pi^2 M_\pi^2} & \left\{ F_\pi^2 M_\pi^2 X(3) + \frac{2}{r} m_s^2 Z^S \right. \\ & \left. - \frac{1}{32\pi^2} \frac{F_\pi^4 M_\pi^4}{F_0^4} r [X(3)]^2 \left(\log \frac{\bar{M}_K^2}{M_K^2} + \frac{2}{9} \log \frac{\bar{M}_\eta^2}{M_\eta^2} \right) \right\} \\ & + \frac{m}{\bar{F}_\pi^2 M_\pi^2} \left(\frac{\partial [F_\pi^2 \delta_\pi]}{\partial m} \right)_{m=0}, \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

$$\gamma_K \left[1 - \frac{3}{64\pi^2} \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{F_0^2 \bar{F}_K^2} r X(3) + \frac{3}{128\pi^2} \frac{M_\pi^4 F_\pi^4}{F_0^4} \frac{1}{\bar{F}_K^2 \bar{M}_K^2} [r X(3)]^2 \right]$$

1. On peut facilement étudier la singularité de la matrice en étudiant $\{w_1, \dots, w_n\}$.

$$\begin{aligned}
& +\gamma_\eta \left[-\frac{1}{32\pi^2} \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{F_0^2 \bar{F}_K^2} \frac{M_\eta^2 \bar{M}_K^2}{\bar{M}_\eta^2 M_K^2} r X(3) + \frac{5}{576\pi^2} \frac{M_\pi^4 F_\pi^4}{F_0^4} \frac{1}{\bar{F}_K^2 M_K^2} \frac{M_\eta^2}{\bar{M}_\eta^2} [r X(3)]^2 \right] \\
& = \frac{1}{\bar{F}_K^2 M_K^2} \left\{ \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{2} X(3) + \frac{1}{r} \left[3m_s^2 Z^S + 2m_s^2 A - \bar{M}_K^2 (m_s \xi + 4m_s \tilde{\xi}) \right] \right. \\
& \quad - \frac{1}{16\pi^2} \frac{F_\pi^4 M_\pi^4}{F_0^4} r [X(3)]^2 \left[\log \frac{\bar{M}_K^2}{M_K^2} + \frac{1}{3} \log \frac{\bar{M}_\eta^2}{M_\eta^2} \right] \\
& \quad \left. + \frac{1}{64\pi^2} \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{F_0^2} \bar{M}_K^2 X(3) \left[5 \log \frac{\bar{M}_K^2}{M_K^2} + 2 \log \frac{\bar{M}_\eta^2}{M_\eta^2} \right] \right\} \\
& + \frac{m}{\bar{F}_K^2 M_K^2} \left(\frac{\partial [F_K^2 \delta_K]}{\partial m} \right)_{m=0} - \frac{\bar{M}_K^2}{M_K^2} \cdot \frac{m}{\bar{F}_K^2} \left(\frac{\partial \varepsilon_K}{\partial m} \right)_{m=0}, \tag{C.45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma_K \left[-\frac{3}{32\pi^2} \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{F_0^2 \bar{F}_\eta^2} \frac{M_K^2 \bar{M}_\eta^2}{\bar{M}_K^2 M_\eta^2} r X(3) + \frac{1}{24\pi^2} \frac{F_\pi^4 M_\pi^4}{F_0^4} \frac{1}{\bar{F}_\eta^2 M_\eta^2} \frac{M_K^2}{\bar{M}_K^2} [r X(3)]^2 \right] \\
& + \gamma_\eta \left[1 + \frac{1}{54\pi^2} \frac{F_\pi^4 M_\pi^4}{F_0^4} \frac{1}{\bar{F}_\eta^2 \bar{M}_\eta^2} [r X(3)]^2 \right] \\
& = \frac{1}{\bar{F}_\eta^2 M_\eta^2} \left\{ \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{3} X(3) \right. \\
& \quad + \frac{1}{r} \left[\frac{10}{3} m_s^2 Z^S + \frac{16}{3} m_s^2 Z^P - \bar{M}_\eta^2 \left(\frac{2}{3} m_s \xi + 4m_s \tilde{\xi} \right) \right] \\
& \quad - \frac{1}{32\pi^2} \frac{F_\pi^4 M_\pi^4}{F_0^4} r [X(3)]^2 \left[\frac{5}{3} \log \frac{M_K^2}{\bar{M}_K^2} + \frac{10}{27} \log \frac{M_\eta^2}{\bar{M}_\eta^2} \right] \\
& \quad \left. - \frac{1}{32\pi^2} \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{F_0^2} \bar{M}_\eta^2 X(3) \left[7 \log \frac{\bar{M}_K^2}{M_K^2} + 2 \log \frac{\bar{M}_\eta^2}{M_\eta^2} + 2 \log \frac{\bar{M}_K^2}{\bar{M}_\eta^2} \right] \right\} \\
& + \frac{m}{\bar{F}_\eta^2 M_\eta^2} \left(\frac{\partial [F_\eta^2 \delta_\eta]}{\partial m} \right)_{m=0} - \frac{\bar{M}_\eta^2}{M_\eta^2} \cdot \frac{m}{\bar{F}_\eta^2} \left(\frac{\partial \varepsilon_\eta}{\partial m} \right)_{m=0}. \tag{C.46}
\end{aligned}$$

Les λ_P sont donnés par:

$$\lambda_\pi = 0, \tag{C.47}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_K \left[1 - \frac{3}{64\pi^2} \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{F_0^2 \bar{F}_K^2} r X(3) + \frac{3}{128\pi^2} \frac{F_\pi^4 M_\pi^4}{F_0^4} \frac{1}{\bar{F}_K^2 \bar{M}_K^2} [r X(3)]^2 \right] \\
& + \lambda_\eta \left[-\frac{1}{32\pi^2} \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{F_0^2 \bar{F}_K^2} \frac{\bar{M}_K^2 M_\eta^2}{M_K^2 \bar{M}_\eta^2} r X(3) + \frac{5}{576\pi^2} \frac{F_\pi^4 M_\pi^4}{F_0^4} \frac{1}{\bar{F}_K^2 M_K^2} \frac{M_\eta^2}{\bar{M}_\eta^2} [r X(3)]^2 \right]
\end{aligned} \tag{C.48}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\bar{F}_K^2 M_K^2} \left\{ \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{2} rX(3) + 2m_s^2 Z^S + 2m_s^2 A - \bar{M}_K^2 (m_s \xi + 2m_s \tilde{\xi}) \right. \\
&\quad - \frac{1}{128\pi^2} \frac{F_\pi^4 M_\pi^4}{F_0^4} [rX(3)]^2 \left[5 \log \frac{\bar{M}_K^2}{M_K^2} + \frac{20}{9} \log \frac{\bar{M}_\eta^2}{M_\eta^2} \right] \\
&\quad \left. + \frac{1}{64\pi^2} \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{F_0^2} \bar{M}_K^2 rX(3) \left[3 \log \frac{\bar{M}_K^2}{M_K^2} + 2 \log \frac{\bar{M}_\eta^2}{M_\eta^2} \right] \right\} \\
&\quad + \frac{m_s}{\bar{F}_K^2 M_K^2} \left(\frac{\partial [F_K^2 \delta_K]}{\partial m_s} \right)_{m=0} - \frac{\bar{M}_K^2}{M_K^2} \cdot \frac{m_s}{\bar{F}_K^2} \left(\frac{\partial \varepsilon_K}{\partial m_s} \right)_{m=0}, \\
&\lambda_K \left[-\frac{3}{32\pi^2} \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{F_0^2 \bar{F}_\eta^2} \frac{M_K^2}{\bar{M}_K^2} \frac{\bar{M}_\eta^2}{M_\eta^2} rX(3) + \frac{1}{24\pi^2} \frac{F_\pi^4 M_\pi^4}{F_0^4} \frac{1}{\bar{F}_\eta^2 M_\eta^2} \frac{M_K^2}{\bar{M}_K^2} [rX(3)]^2 \right] \\
&\quad + \lambda_\eta \left[1 + \frac{1}{54\pi^2} \frac{F_\pi^4 M_\pi^4}{F_0^4} \frac{1}{\bar{F}_\eta^2 \bar{M}_\eta^2} [rX(3)]^2 \right] \\
&= \frac{1}{\bar{F}_\eta^2 M_\eta^2} \left\{ \frac{4F_\pi^2 M_\pi^2}{3} rX(3) \right. \\
&\quad + \frac{8}{3} [m_s^2 Z^S + 2m_s^2 A + 2m_s^2 Z^P] - \bar{M}_\eta^2 \left(\frac{4}{3} m_s \xi + 2m_s \tilde{\xi} \right) \\
&\quad - \frac{1}{12\pi^2} \frac{F_\pi^4 M_\pi^4}{F_0^4} [rX(3)]^2 \left[\log \frac{\bar{M}_K^2}{M_K^2} + \frac{4}{9} \log \frac{\bar{M}_\eta^2}{M_\eta^2} \right] \\
&\quad + \frac{1}{96\pi^2} \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{F_0^2} \bar{M}_\eta^2 rX(3) \left[5 \log \frac{\bar{M}_K^2}{M_K^2} + 4 \log \frac{\bar{M}_\eta^2}{M_\eta^2} + 4 \log \frac{\bar{M}_K^2}{\bar{M}_\eta^2} \right] \Big\} \\
&\quad + \frac{m_s}{\bar{F}_\eta^2 M_\eta^2} \left(\frac{\partial [F_\eta^2 \delta_\eta]}{\partial m_s} \right)_{m=0} - \frac{\bar{M}_\eta^2}{M_\eta^2} \cdot \frac{m_s}{\bar{F}_\eta^2} \left(\frac{\partial \varepsilon_\eta}{\partial m_s} \right)_{m=0}. \tag{C.49}
\end{aligned}$$

C.4 Dérivées logarithmiques pour $m \neq 0$

On peut procéder de la même manière pour calculer les dérivées logarithmiques apparaissant dans le calcul du rayon scalaire du pion:

$$\tilde{\gamma}_P = \frac{m}{M_P^2} \frac{\partial M_P^2}{\partial m}. \tag{C.50}$$

On obtient:

$$\tilde{\gamma}_\pi = \frac{1}{F_\pi^2 M_\pi^2} \left\{ F_\pi^2 M_\pi^2 X(3) + \frac{2}{r^2} [(r+4)m_s^2 Z^S + 4m_s^2 A] \right. \tag{C.51}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2M_\pi^2}{r}[m_s\xi + 2m_s\tilde{\xi}] \Big\} \\
& + \frac{F_\pi^2 M_\pi^2 [X(3)]^2}{F_0^4 32\pi^2} \left[6 \log \frac{M_K^2}{M_\pi^2} + 2 \log \frac{M_\eta^2}{M_K^2} \right. \\
& \quad \left. - 3\tilde{\gamma}_\pi - (r+1)\tilde{\gamma}_K - \frac{1}{9}(2r+1)\tilde{\gamma}_\eta \right] \\
& - \frac{M_\pi^2 X(3)}{F_0^2 32\pi^2} \left[4 \log \frac{M_K^2}{M_\pi^2} + 2 \log \frac{M_\eta^2}{M_K^2} - 4\tilde{\gamma}_\pi - (r+1)\tilde{\gamma}_K \right] \\
& + \frac{m}{F_\pi^2 M_\pi^2} \frac{\partial[F_\pi^2 \delta_\pi]}{\partial m} - \frac{m}{F_\pi^2} \frac{\partial \varepsilon_\pi}{\partial m}, \tag{C.52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_K = & \frac{1}{F_K^2 M_K^2} \left\{ \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{2} X(3) + \frac{3r+4}{r^2} m_s^2 Z^S + \frac{2(r+1)}{r^2} m_s^2 A \right. \\
& \left. - \frac{M_K^2}{r} [m_s\xi + 4m_s\tilde{\xi}] \right\} \\
& + \frac{F_\pi^4 M_\pi^4 [X(3)]^2}{F_0^4 F_K^2 M_K^2 128\pi^2} \left[3(r+2) \log \frac{M_K^2}{M_\pi^2} + (r+2) \log \frac{M_\eta^2}{M_K^2} \right. \\
& \quad \left. - 3\tilde{\gamma}_\pi - 3(r+1)^2 \tilde{\gamma}_K - \frac{5}{9}(2r+1)(r+1)\tilde{\gamma}_\eta \right] \\
& - \frac{F_\pi^2 M_\pi^2 X(3)}{F_K^2 F_0^2 64\pi^2} \left[3 \log \frac{M_K^2}{M_\pi^2} + \log \frac{M_\eta^2}{M_K^2} \right. \\
& \quad \left. - 3\tilde{\gamma}_\pi - 3(r+1)\tilde{\gamma}_K - (2r+1)\tilde{\gamma}_\eta \right] \\
& + \frac{m}{F_K^2 M_K^2} \frac{\partial[F_K^2 \delta_K]}{\partial m} - \frac{m}{F_K^2} \frac{\partial \varepsilon_K}{\partial m}, \tag{C.53}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_\eta = & \frac{1}{F_\eta^2 M_\eta^2} \left\{ \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{3} X(3) + \frac{2(4+5r)}{3r^2} m_s^2 Z^S + \frac{8}{3r^2} m_s^2 A - \frac{16(r-1)}{3r^2} m_s^2 Z^P \right. \\
& \left. - \frac{M_\eta^2}{r} \left[\frac{2}{3} m_s\xi + 4m_s\tilde{\xi} \right] \right\} \\
& + \frac{F_\pi^4 M_\pi^4 [X(3)]^2}{F_0^4 F_\eta^2 M_\eta^2 128\pi^2} \left[8 \log \frac{M_K^2}{M_\pi^2} + \frac{8}{3} \log \frac{M_\eta^2}{M_K^2} \right. \\
& \quad \left. - 4\tilde{\gamma}_\pi - \frac{4}{3}(4r+1)(r+1)\tilde{\gamma}_K - \frac{4}{27}(16r^2+10r+1)\tilde{\gamma}_\eta \right] \\
& - \frac{F_\pi^2 M_\pi^2 X(3)}{F_\eta^2 F_0^2 64\pi^2} \left[\frac{4}{3} \log \frac{M_\eta^2}{M_K^2} - 6(r+1)\tilde{\gamma}_K \right]
\end{aligned}$$

$$+ \frac{m}{F_\eta^2 M_\eta^2} \frac{\partial [F_\eta^2 \delta_\eta]}{\partial m} - \frac{m}{F_\eta^2} \frac{\partial \varepsilon_\eta}{\partial m}. \quad (\text{C.54})$$

Ce système linéaire de trois équations à trois inconnues peut facilement être résolu pour donner $\tilde{\gamma}_\pi$ et $\tilde{\gamma}_K$ en fonction de F_0 , r et $X(3)$.

Annexe D

Recherche de $n_{\text{crit}}(N_c)$

D.1 Coefficients d'expansion de la fonction de partition

Nous voulons calculer les coefficients apparaissant lors de l'expansion de la fonction de partition en puissances de $X = ML^2$ pour N_f près (mais en-dessous) du point critique $n_{\text{crit}}(N_c)$. Les lignes essentielles du calcul sont exposées dans la section 5.3.2, mais certains détails techniques et les résultats pour un nombre d'enroulement quelconque sont présentés ici. Les coefficients $\alpha_\nu, \beta_\nu \dots$ sont définis dans l'équation (5.47).

D.1.1 Coefficient dominant α_ν

Pour obtenir $\alpha_\nu(b, z, a)$, nous étudions d'abord $\alpha_\nu(b, 0, a)$, donné par le comportement dominant en x de l'intégrale de groupe:

$$I_\nu^\alpha = I_\nu(b, a; x \cdot 1) = \int_{U(N_f)} [dU] (\det U)^\nu \exp[bx \langle U^\dagger \rangle + ax^2 \langle U^{\dagger 2} \rangle]. \quad (\text{D.1})$$

Nous pouvons utiliser la formule de Weyl pour transformer l'intégrale de groupe en une intégration sur les valeurs propres de U , $\exp(i\phi_k)$ ($k = 1 \dots N_f$):

$$\int_{U(N_f)} [dU] \rightarrow \frac{1}{N_f!} \int \left(\prod_{k=1}^{N_f} \frac{d\phi_k}{2\pi} \right) |P|^2, \quad (\text{D.2})$$

où $P = \prod_{k < l} (e^{i\phi_k} - e^{i\phi_l})$. P est une combinaison linéaire de $\exp(i \sum n_k \phi_k)$, avec n_k entiers, antisymétrique sous l'échange de deux angles, de sorte que pour $k \neq l$, n_k et n_l doivent être différents. Les ensembles possibles de tels

entiers forment les $N_f!$ permutations de $(0, 1, 2 \dots N_f - 1)$, et P les rassemble toutes, avec un signe dépendant de la signature de la permutation. Si l'intégrant est symétrique sous les permutations des angles, PP^* peut s'écrire: [89]:

$$|P|^2 = N_f! \sum_{\sigma \in \mathcal{P}(N_f)} \epsilon(\sigma) \exp \left[i \sum_{k=1}^{N_f} (\sigma(k) - k) \phi_k \right], \quad (\text{D.3})$$

où $\mathcal{P}(N_f)$ est l'ensemble des permutations de $(1 \dots N_f)$ et ϵ est la signature de la permutation.

L'intégrale de groupe I_ν^α devient:

$$I_\nu^\alpha = \frac{1}{N_f!} \int \left(\prod_{k=1}^{N_f} \frac{d\phi_k}{2\pi} \right) |P|^2 \prod_{k=1}^{N_f} (e^{i\nu\phi_k} \exp [bx e^{-i\phi_k} + ax^2 e^{-2i\phi_k}]). \quad (\text{D.4})$$

Quand $|P|^2$ est remplacé par sa symétrisée (D.3), les intégrales sur les angles deviennent indépendantes les unes des autres:

$$I_\nu^\alpha = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}(N_f)} \epsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{N_f} \int \frac{d\phi_k}{2\pi} e^{i(k-\sigma(k)+\nu)\phi_k} \quad (\text{D.5})$$

$$\begin{aligned} & \times \exp [bx e^{-i\phi_k} + ax^2 e^{-2i\phi_k}] \\ & = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}(N_f)} \epsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{N_f} x^{s(k)} \sum_{\substack{p_k+2q_k=s(k) \\ p_k, q_k \geq 0}} \frac{1}{p_k! q_k!} b^{p_k} a^{q_k}, \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

où $s(k) = k - \sigma(k) + \nu$. Evidemment, si $s(k) < 0$ pour au moins un k , la permutation ne contribue pas. Mais $\mathcal{P}(N_f)$ contient la permutation identique, et $\nu \geq 0$: il existe au moins une permutation contribuant à I_ν^α . En outre, toutes les contributions contiennent la même puissance de x :

$$\prod_{k=1}^{N_f} x^{s(k)} = x^{\sum k - \sigma(k) + \nu} = x^{\nu N_f}, \quad (\text{D.7})$$

ce qui est cohérent avec le facteur $(\det X)^\nu$ dans l'expansion (5.47). Nous obtenons donc:

$$\alpha_\nu(b, z=0, a) = \sum_{m=0 \dots \nu N_f/2} b^{\nu N_f - 2m} a^m c_m, \quad (\text{D.8})$$

avec les coefficients purement combinatoires:

$$c_m = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}(N_f)} \epsilon(\sigma) \sum_{\substack{\{q_k=1 \dots s(k)/2\} \\ \sum q_k = m}} \left[\prod_k q_k! (s(k) - 2q_k)! \right]^{-1}. \quad (\text{D.9})$$

Une autre manière de décrire c_m est fournie par le polynme générateur:

$$\sum_{m=0 \dots \nu N_f/2} w^m c_m = \begin{vmatrix} X_\nu & X_{\nu+1} & X_{\nu+2} & \cdots & X_{\nu+N-1} \\ X_{\nu-1} & X_\nu & X_{\nu+1} & \cdots & X_{\nu+N-2} \\ X_{\nu-2} & X_{\nu-1} & X_\nu & \cdots & X_{\nu+N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{\nu-N+1} & X_{\nu-N+2} & X_{\nu-N+3} & \cdots & X_\nu \end{vmatrix}, \quad (\text{D.10})$$

avec les polynômes en w :

$$X_j = \sum_{q=0 \dots j/2} \frac{w^q}{q!(j-2q)!}. \quad (\text{D.11})$$

Puisque les dérivées de I_ν par rapport à b et z ne sont pas indépendantes, Eq. (5.46) fournit l'expression générale de α_ν :

$$\alpha_\nu(b, z, a) = \sum_{l+2m+2p=\nu N_f} b^l a^m z^p \frac{(l+2p)!}{l!p!} c_m. \quad (\text{D.12})$$

D.1.2 Coefficients sous-dominants $\beta_\nu, \gamma_\nu, \delta_\nu$

Les dérivées de α_ν sont notées:

$$\alpha'_\nu = \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial b} \quad \dot{\alpha}_\nu = \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial a} \quad \alpha''_\nu = \frac{\partial^2 \alpha_\nu}{\partial b^2} = \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial z} \quad (\text{D.13})$$

Pour $b = \bar{b}$, $a = \bar{a}$, $z = \bar{z}$, pour N saveurs, si nous notons $K = N + |\nu|$, les coefficients sont:

$$\beta = \alpha \frac{1}{K} (y + b^2) + \alpha' \frac{1}{KN} b (2Nz + 2a + Ny) + \alpha'' \frac{2}{NK} y (Nz + a), \quad (\text{D.14})$$

$$\begin{aligned} \gamma = \alpha \bigg\{ & \frac{1}{K^2 - 1} \left[\frac{b^4}{2} + 2b^2 y + 2b^2 z + y^2 + 2z^2 + 2a^2 \right] \\ & - \frac{1}{K(K^2 - 1)} 2a[b^2 + 2z] + \frac{(K - N)(KN + 1)}{K(K^2 - 1)(N^2 - 1)} 2a^2 \bigg\} \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

$$\begin{aligned}
& +\alpha' \left\{ \frac{1}{K^2-1} b[b^2y + 2b^2z + 2y^2 + 6yz + 4z^2] \right. \\
& \quad - \frac{1}{K(K^2-1)} 2ab[y + 2z] + \frac{1}{N(K^2-1)} 2ab[b^2 + 2y + 2z] \\
& \quad \left. - \frac{1}{KN(K^2-1)} 2a^2b - \frac{K+N}{K(K^2-1)(N^2-1)} 2a^2b \right\} \\
& +\alpha'' \left\{ \frac{1}{K^2-1} \left[\frac{1}{2} b^2y^2 + 4b^2yz + 2b^2z^2 + 5y^2z + 4z^3 \right] \right. \\
& \quad - \frac{1}{NK(K^2-1)} 8a^2z + \frac{1}{N(K^2-1)} 4a[b^2y + b^2z + y^2 + 2z^2] \\
& \quad \left. - \frac{1}{K(K^2-1)} a[y^2 + 4z^2] + \frac{KN+1}{NK(N^2-1)(K^2-1)} 2a^2b^2 \right\} \\
& +\alpha''' \left\{ \frac{1}{K^2-1} 2byz[2z + y] + \frac{1}{N(K^2-1)} 2aby[4z + y] \right. \\
& \quad \left. + \frac{KN+1}{NK(K^2-1)(N^2-1)} 4a^2by \right\} \\
& +\alpha'''' \left\{ \frac{1}{K^2-1} 2y^2z^2 + \frac{1}{N(K^2-1)} 4ay^2z \right. \\
& \quad \left. + \frac{KN+1}{NK(K^2-1)(N^2-1)} 2a^2y^2 \right\} \\
& - \frac{K+N}{NK(K^2-1)(N^2-1)} [\dot{\alpha} 2a^2(2z + b^2) + \dot{\alpha}' 4a^2by + \dot{\alpha}'' 2a^2y^2],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta = \alpha & \left\{ -\frac{1}{K(K^2-1)} \left[\frac{b^4}{2} + 2b^2z + 2b^2y + y^2 + 2z^2 + 2a^2 \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{K^2-1} 2a[b^2 + 2z] - \frac{(K-N)(K+N)}{K(K^2-1)(N^2-1)} 2a^2 \right\} \\
& +\alpha' \left\{ -\frac{1}{K(K^2-1)} b[b^2y + 2b^2z + 2y^2 + 6yz + 4z^2] \right. \\
& \quad + \frac{1}{K^2-1} 2ab[y + 2z] - \frac{1}{NK(K^2-1)} 2ab[2y + 2z + b^2] \\
& \quad \left. + \frac{1}{N(K^2-1)} 2a^2b + \frac{KN+1}{K(K^2-1)(N^2-1)} 2a^2b \right\} \\
& +\alpha'' \left\{ -\frac{1}{K(K^2-1)} \left[\frac{1}{2} b^2y^2 + 4b^2yz + 2b^2z^2 + 5y^2z + 4z^3 \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{N(K^2-1)} 8a^2z - \frac{1}{NK(K^2-1)} 4a[b^2y + b^2z + y^2 + 2z^2] \right\}
\end{aligned} \tag{D.16}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{K^2 - 1} a[y^2 + 4z^2] - \frac{K + N}{NK(N^2 - 1)(K^2 - 1)} 2a^2 b^2 \Big\} \\
& + \alpha''' \left\{ -\frac{1}{K(K^2 - 1)} 2byz[2z + y] - \frac{1}{NK(K^2 - 1)} 2aby[4z + y] \right. \\
& \quad \left. - \frac{K + N}{NK(K^2 - 1)(N^2 - 1)} 4a^2 by \right\} \\
& + \alpha'''' \left\{ -\frac{1}{K(K^2 - 1)} 2y^2 z^2 - \frac{1}{NK(K^2 - 1)} 4ay^2 z \right. \\
& \quad \left. - \frac{K + N}{NK(K^2 - 1)(N^2 - 1)} 2a^2 y^2 \right\} \\
& + \frac{KN + 1}{NK(K^2 - 1)(N^2 - 1)} [\dot{\alpha} 2a^2(2z + b^2) + \dot{\alpha}' 4a^2 by + \dot{\alpha}'' 2a^2 y^2] .
\end{aligned}$$

D.2 Conditions de positivité près de $n_{\text{crit}}(N_c)$

On cherche quelles contraintes sont induites sur $\mathcal{Z}_S/\mathcal{A}$ et $\mathcal{Z}_P/\mathcal{A}$ du fait de la positivité de $(\bar{\sigma}_2)^2$, σ_4 et σ_6 .

D.2.1 $(\bar{\sigma}_2)^2$ et σ_4

Pour $(\bar{\sigma}_2)^2$ et σ_4 , on a les règles de somme à l'ordre dominant, près de $n_{\text{crit}}(N_c)$:

$$\langle\langle (\bar{\sigma}_2)^2 \rangle\rangle_0^{(N_f)} = \frac{V^2 \mathcal{A}^2}{16N_f^2(N_f^2 - 1)} \quad (\text{D.17})$$

$$\begin{aligned}
& \times \{ \zeta^2 + \zeta[4(2N_f^2 + 1)\bar{S} - 4\bar{P} - 4N_f] \\
& \quad + [4(2N_f^2 + 1)(\bar{S}^2 + \bar{P}^2) - 8\bar{S}\bar{P} - 8N_f(\bar{S} + \bar{P}) + 4N_f^2] \}
\end{aligned}$$

$$\langle\langle \sigma_4 \rangle\rangle_0^{(N_f)} = \frac{V^2 \mathcal{A}^2}{16N_f(N_f^2 - 1)} \quad (\text{D.18})$$

$$\begin{aligned}
& \times \{ \zeta^2 + \zeta[12\bar{S} - 4\bar{P} - 4N_f] \\
& \quad + [12\bar{S}^2 + 12\bar{P}^2 - 8\bar{S}\bar{P} + 4 - 8N_f\bar{S} - 8N_f\bar{P}] \}
\end{aligned}$$

avec $\zeta = V\Sigma^2/\mathcal{A}$, $\bar{S} = \mathcal{Z}_S/\mathcal{A}$ et $\bar{P} = \mathcal{Z}_P/\mathcal{A}$. On cherche donc la positivité de quantités de la forme $\zeta^2 + 2a\zeta + b$. On a trois cas de positivité ($\Delta = a^2 - b$):

$$\text{A: } \Delta < 0, a < 0 \quad \text{B: } \Delta < 0, a > 0 \quad \text{C: } \Delta > 0, a < 0, b > 0$$

résumés sur la figure D.1.

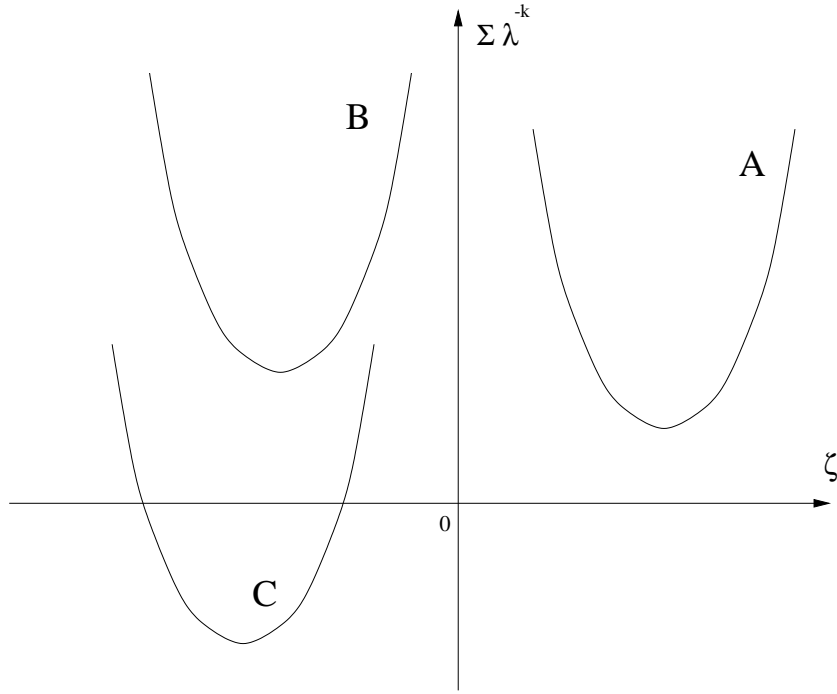


FIG. D.1 – Cas de positivité pour $\langle\langle(\bar{\sigma}_2)^2\rangle\rangle_0^{(N_f)}$ et $\langle\langle\sigma_4\rangle\rangle_0^{(N_f)}$

Pour σ_2 , si on pose $u = (\bar{S} - \bar{P})/2$, $v = (\bar{S} + \bar{P})/4 - 1/N_f$, on obtient:

$$a = (N_f^2 + 1)u + 2N_f^2v \quad (\text{D.19})$$

$$b = (N_f^2 + 1)u^2 + 4N_f^2v^2 + 4(N_f^2 - 1) \quad (\text{D.20})$$

$$\Delta = N_f^2(N_f^2 + 1)u^2 + 4N_f^2(N_f^2 + 1)uv - 4(N_f^2 - 1) \quad (\text{D.21})$$

Ainsi, $\Delta = 0$ correspond à une hyperbole, tandis que $a = 0$ est une droite passant par le centre de l'hyperbole. On a $b > 0$. L'ensemble de la zone positive dans le plan (u, v) est sur la figure D.2.

Pour σ_4 , si on pose $U = (\bar{S} - \bar{P})/2$, $V = (\bar{S} + \bar{P})/4 - N_f$, on obtient:

$$A = 2(U + V) \quad (\text{D.22})$$

$$B = 2[U^2 + 2V^2 - 2(N_f^2 - 1)] \quad (\text{D.23})$$

$$\Delta = 2[U^2 + 4UV + 2(N_f^2 - 1)] \quad (\text{D.24})$$

Ainsi, $\Delta = 0$ correspond à une ellipse, tandis que $A = 0$ est une droite passant par le centre de l'ellipse, et $B = 0$ une hyperbole tangente à l'ellipse $\Delta = 0$. L'ensemble de la zone positive dans le plan (U, V) est sur la figure D.3.

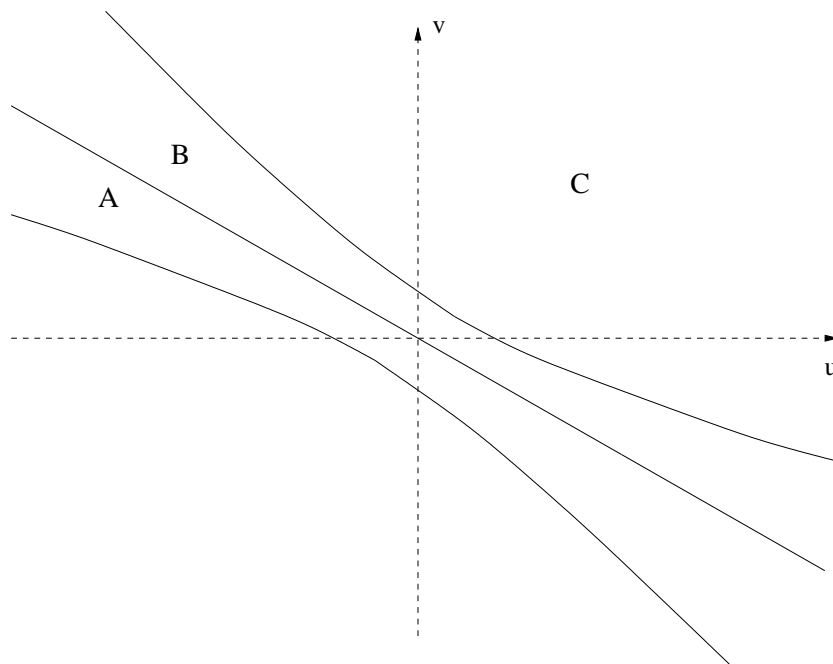


FIG. D.2 – Positivité de $\langle\langle(\bar{\sigma}_2)^2\rangle\rangle_0^{(N_f)}$ dans le plan (u, v)

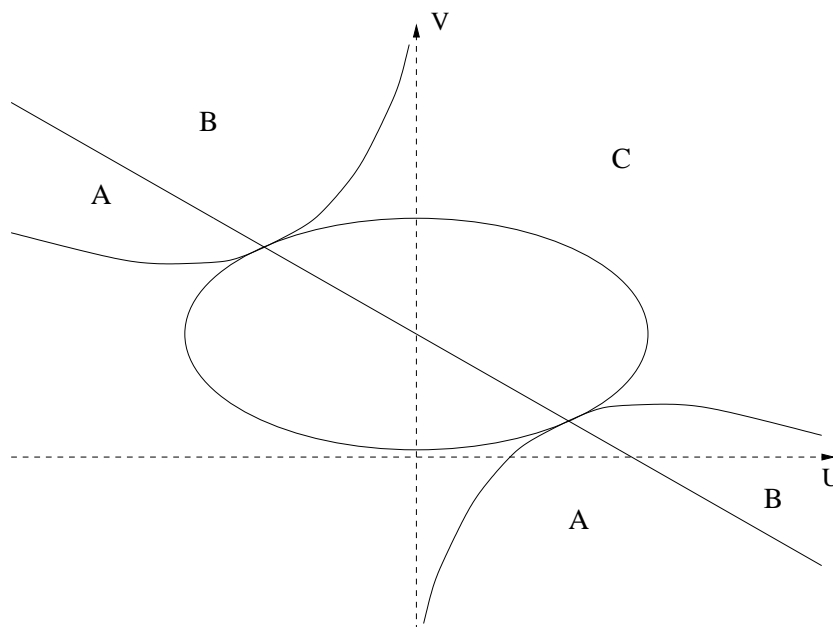


FIG. D.3 – Positivité de $\langle\langle\sigma_4\rangle\rangle_0^{(N_f)}$ dans le plan (U, V)

D.2.2 σ_6

Pour σ_6 , on a la règle de somme:

$$\begin{aligned} \langle\langle \sigma_6 \rangle\rangle_0^{(N_f)} &= \frac{V^3 \mathcal{A}^3}{32N_f(N_f^2 - 1)(N_f^2 - 4)} \\ &\times \left\{ \zeta^3 + \zeta^2[30\bar{S} - 6\bar{P} - 6N_f] \right. \\ &\quad + \zeta[180\bar{S}^2 + 36\bar{P}^2 - 72\bar{S}\bar{P} - 72N_f\bar{S} + 6(N_f^2 + 2)] \\ &\quad + [120\bar{S}^3 - 120\bar{P}^3 + 72\bar{S}\bar{P}^2 - 72\bar{S}^2\bar{P} - 72N_f\bar{S}^2 \\ &\quad \left. + 72N_f\bar{P}^2 + 12(N_f^2 + 2)\bar{S} - 12(N_f^2 + 2)\bar{P}] \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

On cherche donc la positivité d'une quantité de la forme $f(\zeta) = \zeta^3 + a\zeta^2 + b\zeta + c$. Les variations de f sont données par le signe de $f'(\zeta) = 3\zeta^2 + 2a\zeta + c$, qui est gouverné par $\Delta' = a^2 - 3b$. Si $\Delta' < 0$, f est une fonction croissante, et la condition de positivité se traduit par $f(0) = c > 0$. Si $\Delta' > 0$, f' possède deux racines $x_- < x_+$. Suivant la position de ces deux racines par rapport à 0, la positivité de f sera commandée par $f(0)$ ou $f(x_+)$. Il y a donc quatre cas de positivité:

- I : $\Delta' < 0, c > 0$
- II : $\Delta' > 0, c > 0, x_+ < 0$
- III : $\Delta' > 0, f(x_+) > 0, x_+ > 0, x_- < 0$
- IV : $\Delta' > 0, c > 0, f(x_+) > 0, x_- > 0$

résumés sur la figure D.4. L'allure générale des zones correspondantes dans le plan (\bar{S}, \bar{P}) est indiquée sur la figure D.5.

D.3 Régularisation dimensionnelle sur un tore

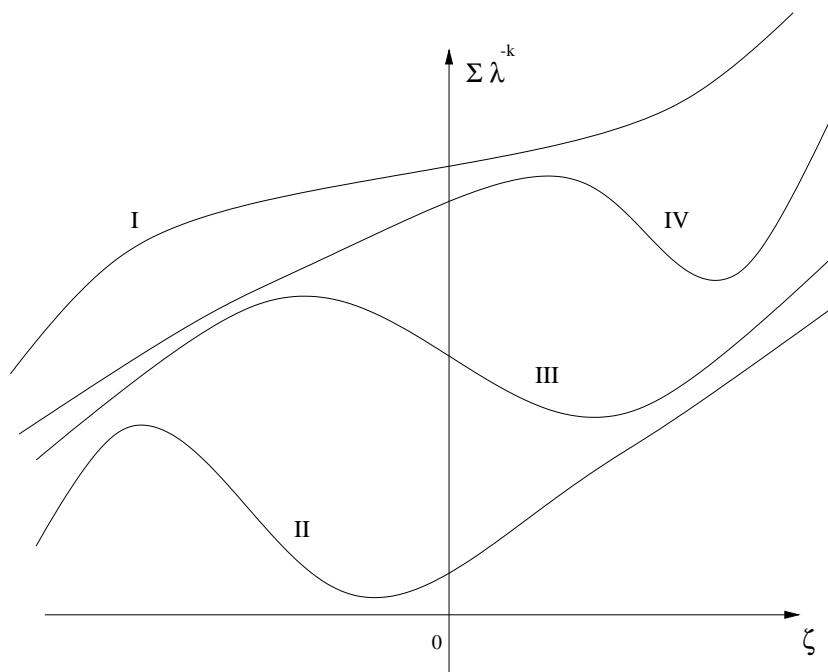
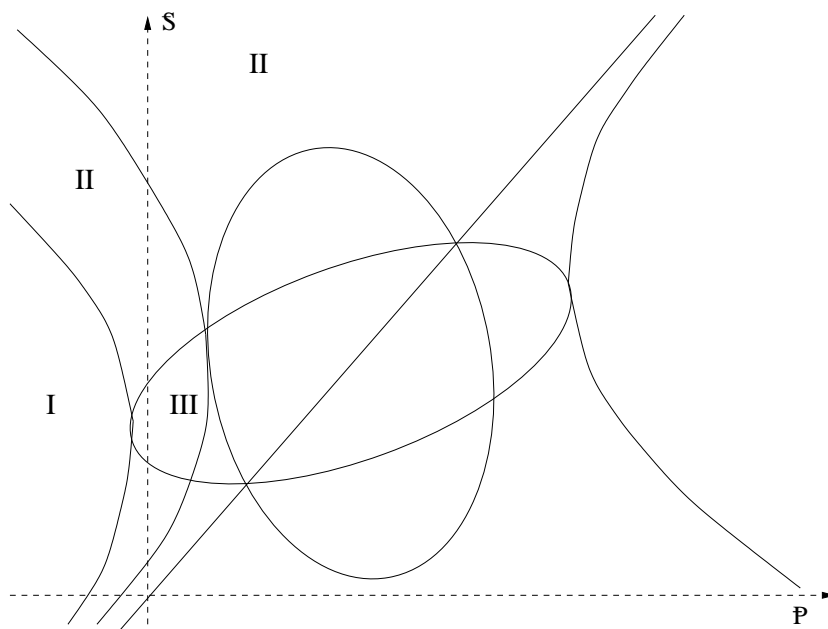
D.3.1 $\sum' 1$

Suivant la procédure de régularisation décrite par Hasenfratz et Leutwyler [92], nous voulons régulariser des sommes du type:

$$G_H = \frac{1}{V} \sum_p H(p), \quad (\text{D.26})$$

où H est une fonction et p est sommé sur $2\pi/L \cdot Z^4$. La transformée de Fourier de $H(p)$ est:

$$\tilde{H}(x) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{ipx} H(p), \quad (\text{D.27})$$


 FIG. D.4 – Cas de positivité pour $\langle\langle\sigma_6\rangle\rangle_0^{(N_f)}$

 FIG. D.5 – Positivité de $\langle\langle\sigma_6\rangle\rangle_0^{(N_f)}$ dans le plan (\bar{S}, \bar{P})

et satisfait l'identité:

$$G_H = \frac{1}{V} \sum_p H(p) = \sum_l \tilde{H}(l), \quad (\text{D.28})$$

où $l = L \cdot (l_1, l_2, \dots, l_d)$ avec des l_i entiers. A cause de la relation:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} G_H = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \sum_p H(p) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} H(p) = \tilde{H}(0), \quad (\text{D.29})$$

il est possible de séparer au sein G_H les dépendances sur le cut-off et sur le volume:

$$G_H = \lim_{V \rightarrow \infty} G_H + g_H \quad g_H = \sum_l' \tilde{H}(l). \quad (\text{D.30})$$

$\lim_{V \rightarrow \infty} G_H$ contient des divergences qui doivent être régularisées (par exemple en utilisant la régularisation dimensionnelle), tandis que g_H est finie et dépend seulement du volume.

Pour u , nous considérons $H(p) = 1$ pour $p \neq 0$ et $H(0) = 0$. Sa transformée de Fourier est $\tilde{H}(l) = \delta^{(4)}(l)$. g_H est nulle, de même que des intégrales de la forme $\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}$ une fois régularisées dimensionnellement, de sorte que:

$$u = \sum_{n \neq 0} 1 \leftrightarrow 0. \quad (\text{D.31})$$

D.3.2 $\sum' 1/n^2$

Rappelons la régularisation de $v = \sum' 1/n^2$ donnée dans Ref. [92]. Nous avons les relations:

$$\frac{1}{V} \sum_p' \frac{1}{p^2} = \lim_{M \rightarrow 0} \left[\frac{1}{V} \sum_p \frac{1}{p^2 + M^2} - \frac{1}{VM^2} \right] = \lim_{M \rightarrow 0} \left[G_H - \frac{1}{VM^2} \right]. \quad (\text{D.32})$$

avec $H(p) = 1/(p^2 + M^2)$. En régularisation dimensionnelle, (D.30) contient:

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow \infty} G_H &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p \frac{1}{p^2 + M^2} \\ &= \frac{\Gamma(1 - d/2)}{(4\pi)^{d/2}} M^{d-2} = \frac{M^2}{8\pi^2} (\ln M + c_1), \end{aligned} \quad (\text{D.33})$$

où c_1 contient un pole pour $d = 4$.

D'autre part, la transformée de Fourier de H s'écrit [92]:

$$\tilde{H}(x) = \int_0^\infty d\lambda (4\pi\lambda)^{-d/2} e^{-\lambda M^2} \exp\left(-\lambda M^2 - \frac{x^2}{4\lambda}\right), \quad (\text{D.34})$$

d'où l'expression de g_H :

$$g_H = \int_0^\infty d\lambda (4\pi\lambda)^{-d/2} e^{-\lambda M^2} \sum'_\lambda \exp\left(-L^2 \sum_{\mu=1}^d \frac{l_\mu^2}{4\lambda}\right), \quad (\text{D.35})$$

où les l_i sont des entiers (non tous nuls). On peut exploiter le fait que $g_H = -dg/dM^2$, avec:

$$g = \int_0^\infty d\lambda \frac{1}{\lambda} (4\pi\lambda)^{-d/2} e^{-\lambda M^2} \sum'_\lambda \exp\left(-L^2 \sum_{\mu=1}^d \frac{l_\mu^2}{4\lambda}\right) \quad (\text{D.36})$$

$$= \frac{1}{V} \int_0^\infty dt t^{-d/2-1} \exp\left(-\frac{M^2 L^2 t}{4\pi}\right) [S^4(1/t) - 1], \quad (\text{D.37})$$

avec la fonction théta: $S(x) = \sum_{n=-\infty}^\infty \exp[-\pi n^2 x]$.

On sépare l'intégrale (D.37) en deux parties: $0 \leq t \leq 1$ et $1 \leq t < \infty$. Pour la deuxième, on peut utiliser l'identité: $S(x) = S(1/x)/\sqrt{x}$, de sorte que:

$$g = \frac{1}{V} (a + b_0 - b_{-d/2}), \quad (\text{D.38})$$

$$a = \int_0^1 dt t^{-d/2-1} \exp\left(-\frac{M^2 L^2 t}{4\pi}\right) [S^4(1/t) - 1] \quad (\text{D.39})$$

$$+ \int_0^1 dt t^{-1} \exp\left(-\frac{M^2 L^2}{4\pi t}\right) [S^4(1/t) - 1],$$

$$b_s = \int_1^\infty dt t^{s-1} \exp\left(-\frac{M^2 L^2 t}{4\pi}\right). \quad (\text{D.40})$$

a ne contient pas de singularités infrarouges, et possède une expansion en puissances de M^2 de la forme:

$$a = \sum_{n=0}^\infty \left(-\frac{M^2 L^2}{4\pi}\right)^n \frac{\hat{\alpha}_{n-d/2} + \hat{\alpha}_{-n}}{n!}, \quad (\text{D.41})$$

$$\hat{\alpha}_p = \int_0^1 dt t^{p-1} [S(1/t)^4 - 1]. \quad (\text{D.42})$$

b_s contient des singularités infrarouges:

$$b_s = \left(\frac{M^2 L^2}{4\pi} \right)^{-s} \Gamma(s) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{M^2 L^2}{4\pi} \right)^n \frac{1}{n+s}. \quad (\text{D.43})$$

Néanmoins, pour $M \neq 0$, b_0 est bien définie, car le pôle de $\Gamma(s)$ est compensé par le deuxième terme (analytique) de (D.43):

$$b_0 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n!} \left(-\frac{M^2 L^2}{4\pi} \right)^n. \quad (\text{D.44})$$

On obtient ainsi l'expression de g :

$$g = -\frac{2}{V} \log(ML) + \frac{1}{16\pi^2} M^4 \left[\log(ML) - \frac{1}{4} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} M^{2n} L^{2n-4}, \quad (\text{D.45})$$

$$\beta_0 = \hat{\alpha}_{-2} + \hat{\alpha}_0 + \log(4\pi) + \Gamma'(1) - \frac{1}{2}, \quad (\text{D.46})$$

$$\beta_1 = -\frac{1}{4\pi} [\hat{\alpha}_{-1} + \hat{\alpha}_1 - 2]. \quad (\text{D.47})$$

Les constantes β_i sont appelées “coefficients de forme”, et dépendent de la géométrie de la boîte.

g_H a pour expression:

$$g_H = \frac{1}{VM^2} - \frac{\beta_1}{L^2} + O(M^2). \quad (\text{D.48})$$

où apparaît seulement β_1 . Pour un tore quadri-dimensionnel $\beta_1 = 0.1405$. La régularisation dimensionnelle aboutit à:

$$v = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \leftrightarrow -4\pi^2 \beta_1. \quad (\text{D.49})$$

Bibliographie

- [1] Y. Nambu, Phys. Rev. Lett. **4** (1960) 380, Phys. Rev. **117** (1960) 648.
Y. Nambu et G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122** (1961) 345, Phys. Rev. **124** (1961) 246.
S. L. Glashow et S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **20** (1968) 224.
- [2] M. Gell-Mann, R.J. Oakes et B. Renner, Phys. Rev. **175** (1968) 2195.
- [3] J. Goldstone, Nuovo Cim. **19** (1961) 154.
J. Goldstone, A. Salam et S. Weinberg, Phys. Rev. **127** (1962) 965.
- [4] A.M. Bernstein, D. Drechsel et T. Walcher Eds., *Chiral dynamics: Theory and experiment. Proceedings, Workshop, Mainz, Germany, September 1-5, 1997*, Springer (1998).
- [5] J. Stern dans Ref. [4] [hep-ph/9712438].
- [6] J. Gasser et H. Leutwyler, Annals Phys. **158** (1984) 142; Nucl. Phys. **B250** (1985) 465.
- [7] N.H. Fuchs, H. Sazdjian et J. Stern, Phys. Lett. **B269** (1991) 183; Phys. Rev. **D47** (1993) 3814.
- [8] L. Maiani, G. Pancheri et N. Paver Eds., *The second DAPHNE physics handbook*, INFN (1995).
- [9] M. Knecht et J. Stern dans Ref. [8] [hep-ph/9411253].
- [10] M. Baillargeon et P.J. Franzini, dans Ref. [8] [hep-ph/9407277].
J. Lowe dans Ref. [4], J. Schacher dans *id.* [hep-ph/9711361].
- [11] J. Bijnens, G. Colangelo, G. Ecker, J. Gasser et M. E. Sainio, Phys. Lett. **B374** (1996) 210 [hep-ph/9511397].
J. Bijnens, G. Colangelo, G. Ecker, J. Gasser et M. E. Sainio, Nucl. Phys. **B508** (1997) 263 [hep-ph/9707291].

- [12] J. Gasser, V. E. Lyubovitskij et A. Rusetsky, Phys. Lett. **B471** (1999) 244 [hep-ph/9910438].
V. Antonelli, A. Gall, J. Gasser et A. Rusetsky, hep-ph/0003118.
- [13] M. Knecht, B. Moussallam, J. Stern et N.H. Fuchs, Nucl. Phys. **B457** (1995) 513.
- [14] H. Sazdjian, hep-ph/0004226.
- [15] D. Morgan et M. R. Pennington in Ref. [8]
V. Bernard, N. Kaiser and U. G. Meissner, Phys. Lett. **B332** (1994) 415 [hep-ph/9404236].
M. G. Olsson, U. Meissner, N. Kaiser and V. Bernard, hep-ph/9503237.
V. Bernard, N. Kaiser and U. G. Meissner, Nucl. Phys. **B457** (1995) 147 [hep-ph/9507418].
N. Fettes, V. Bernard and U. G. Meissner, Nucl. Phys. **A669** (2000) 269 [hep-ph/9907276].
- [16] C. J. Goebel, Phys. Rev. Lett. **1** (1958) 337.
G. F. Chew and F. E. Low, Phys. Rev. **113** (1959) 1640.
- [17] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B72** (1974) 461.
G. Veneziano, Nucl. Phys. **B117** (1976) 519.
E. Witten, Nucl. Phys. **B156** (1979) 269, E. Witten, Nucl. Phys. **B160** (1979) 57.
- [18] G. Ecker, J. Gasser, A. Pich et E. de Rafael, Nucl. Phys. **B321** (1989) 311.
M. Knecht et E. de Rafael, Phys. Lett. **B424** (1998) 335 [hep-ph/9712457].
S. Peris, M. Perrottet et E. de Rafael, JHEP **9805** (1998) 011 [hep-ph/9805442].
M. F. Golterman et S. Peris, Phys. Rev. **D61** (2000) 034018 [hep-ph/9908252].
- [19] R. S. Chivukula, *Models of electroweak symmetry breaking*, hep-ph/9803219.
- [20] E. Farhi et L. Susskind, Phys. Rept. **74** (1981) 277.

- [21] S. Descotes, L. Girlanda et J. Stern, JHEP **0001** (2000) 041 [hep-ph/9910537].
- [22] S. Descotes et J. Stern, Phys. Lett. **B488** (2000) 274 [hep-ph/0007082].
- [23] S. Descotes, en préparation.
- [24] S. Descotes et J. Stern, Phys. Rev. **D62** (2000) 054011 [hep-ph/9912234].
- [25] H. Leutwyler, *Principles of chiral perturbation theory*, hep-ph/9406283.
- [26] H. Leutwyler, Annals Phys. **235** (1994) 165 [hep-ph/9311274].
- [27] M. Knecht, *La Chromodynamique Quantique à basse énergie*, 27ème Ecole d'été de Gif: *La Chromodynamique quantique sous toutes ses couleurs*, Clermont-Ferrand.
- [28] A. Pich, *Effective field theory*, Ecole d'été des Houches 1997: *Probing the Standard Model of particle interactions* hep-ph/9806303.
- [29] C. P. Burgess, *Goldstone and pseudo-Goldstone bosons in nuclear, particle and condensed-matter physics*, hep-th/9808176.
- [30] U. G. Meissner, Rept. Prog. Phys. **56** (1993) 903 [hep-ph/9302247].
- [31] C.G. Callan, R.F. Dashen et D.J. Gross, Phys. Lett. **63B** (1976) 334.
R. Jackiw et C. Rebbi, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 172.
- [32] B. Borasoy, Phys. Rev. **D61** (2000) 114017 [hep-ph/0004011].
- [33] C. Vafa et E. Witten, Nucl. Phys. **B234** (1984) 173.
- [34] G. 't Hooft in G. 't Hooft, C. Itzykson, A. Jaffe, H. Lehmann, P. K. Mitter, I. M. Singer et R. Stora, *Recent Developments In Gauge Theories*, Nato Advanced Study Institutes Series: Series B, Physics 59 (1980).
- [35] C. Vafa et E. Witten, Commun. Math. Phys. **95** (1984) 257.
- [36] S. Weinberg, *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*, Cambridge Univ. Pr. (1995), et *The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern applications*, Cambridge Univ. Pr. (1996).
- [37] L. D. Faddeev et A. A. Slavnov, *Gauge Fields. Introduction To Quantum Theory*, Frontiers In Physics 50, Benjamin/Cummings (1980).

- [38] A. V. Smilga, *Lectures on the foundations of QCD*, ITEP Spring School 1998, Moscou, hep-ph/9901412.
- [39] M. F. Atiyah et I. M. Singer, Proc. Nat. Acad. Sci. **81** (1984) 2597.
- [40] J. Schwinger, Phys. Rev. **93** (1954) 615.
H. Hogreve, R. Schrader et R. Seiler, Nucl. Phys. **B142** (1978) 525.
D. Brydges, J. Frohlich et E. Seiler, Ann. Phys. **121** (1979) 227.
J.E. Avron et B. Simon, Phys. Lett. **A75** (1980) 41.
- [41] R. Schrader et R. Seiler, Commun. Math. Phys. **61** (1978) 169.
- [42] T. Banks et A. Casher, Nucl. Phys. **B169** (1980) 103.
- [43] J. Stern, hep-ph/9801282.
- [44] T. DeGrand, hep-th/9610132.
- [45] D.J. Gross et F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1343.
- [46] T. Banks et A. Zaks, Nucl. Phys. **B196** (1982) 189.
- [47] S. Spanier et N. Tornqvist in Eur. Phys. J. **C3** (1998) 390.
Pour une discussion récente, M.R. Pennington, hep-ph/9905241, et références incluses.
- [48] Y. Iwasaki, K. Kanaya, S. Kaya, S. Sakai et T. Yoshie, Prog. Theor. Phys. Suppl. **131** (1998) 415 [hep-lat/9804005].
- [49] D. Chen et R.D. Mawhinney, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **53** (1997) 216 [hep-lat/9705029].
R.D. Mawhinney, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **60A** (1998) 306 [hep-lat/9705031].
C. Sui, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **73** (1999) 228.
R. D. Mawhinney, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **83** (2000) 57 [hep-lat/0001032].
- [50] E. Gardi et G. Grunberg, J. High Energy Phys. **03** (1999) 024 [hep-th/9810192].
- [51] T. Appelquist, A. Ratnaweera, J. Terning et L.C. Wijewardhana, Phys. Rev. **D58** (1998) 105017 [hep-ph/9806472].

- [52] M. Velkovsky et E. Shuryak, Phys. Lett. **B437** (1998) 398 [hep-ph/9703345].
T. Appelquist et S.B. Selipsky, Phys. Lett. **B400** (1997) 364 [hep-ph/9702404].
- [53] J.J. Verbaarschot, hep-ph/9902394.
- [54] T. Schafer et E.V. Shuryak, Rev. Mod. Phys. **70** (1998) 323 [hep-ph/9610451].
- [55] I.I. Kogan, A. Kovner et M. Shifman, Phys. Rev. **D59** (1999) 016001 [hep-ph/9807286].
- [56] J. Wess et B. Zumino, Phys. Lett. **B37** (1971) 95.
- [57] E. Witten, Nucl. Phys. **B223** (1983) 422.
- [58] R. Kaiser et H. Leutwyler, hep-ph/0007101.
- [59] J. Bijnens, G. Colangelo et G. Ecker, Phys. Lett. **B441** (1998) 437 [hep-ph/9808421], JHEP **9902** (1999) 020 [hep-ph/9902437], Annals Phys. **280** (2000) 100 [hep-ph/9907333].
- [60] G. Amoros, J. Bijnens et P. Talavera, hep-ph/0003258, Nucl. Phys. **B568** (2000) 319 [hep-ph/9907264].
- [61] L. Girlanda et J. Stern, Nucl. Phys. **B575** (2000) 285 [hep-ph/9906489].
L. Ametller, J. Kambor, M. Knecht et P. Talavera, Phys. Rev. **D60** (1999) 094003 [hep-ph/9904452].
L. Girlanda, Thèse de doctorat, Université Paris-XI, Orsay, France (1999).
- [62] N. H. Fuchs, M. Knecht et J. Stern, Phys. Rev. **D62** (2000) 033003 [hep-ph/0001188].
- [63] J. Bijnens, G. Ecker et J. Gasser in Ref. [8], [hep-ph/9411232].
- [64] M. Gell-Mann, Phys. Rev. **125** (1962) 1067.
S. Okubo, Prog. Theor. Phys. **27** (1962) 949.
- [65] B. Moussallam, Eur. Phys. J. **C14** (2000) 111 [hep-ph/9909292].
- [66] B. Moussallam, JHEP **0008** (2000) 005 [hep-ph/0005245].

- [67] A. I. Davydychev, V. A. Smirnov et J. B. Tausk, Nucl. Phys. **B410** (1993) 325 [hep-ph/9307371].
- [68] V. A. Smirnov, Commun. Math. Phys. **134** (1990) 109.
- [69] R. Omnes, Nuovo Cim. **8** (1958) 316.
- [70] N.I. Muskhelishvili, *Singular integral equations*, P. Noordhoff (1953).
- [71] J. F. Donoghue, J. Gasser et H. Leutwyler, Nucl. Phys. **B343** (1990) 341.
- [72] T. N. Truong et R. S. Willey, Phys. Rev. **D40** (1989) 3635.
T. N. Pham et T. N. Truong, Phys. Rev. **D16** (1977) 896.
- [73] G. Grayer *et al.*, Nucl. Phys. **B75** (1974) 189.
L. Rosselet *et al.*, Phys. Rev. **D15** (1977) 574.
- [74] J. A. Oller, E. Oset et J. R. Pelaez, Phys. Rev. **D59** (1999) 074001 [hep-ph/9804209].
- [75] B. Hyams *et al.*, Nucl. Phys. **B64** (1973) 134.
P. Estabrooks *et al.*, AIP Conf. Proc. **13**(1973) 37.
G. Grayer *et al.*, Compte-rendu de *3rd Philadelphia Conference on Experimental Meson Spectroscopy*, Philadelphia, 1972, American Institute of Physics, New York, 1972, 5.
G. Grayer *et al.*, AIP Conf. Proc. **13** (1973) 117.
G. Grayer *et al.*, Article No. 768 pour *16th International Conference on High-Energy Physics*, Batavia, 1972.
S. D. Protopopescu et M. Alston-Garnjost, Phys. Rev. **D7** (1973) 1279.
W. Manner, PRINT-74-1280 (CERN), présenté à *4th International Conference on Experimental Meson Spectroscopy*, Boston, Mass., Apr 26-27, 1974.
C. D. Frogatt et J. L. Petersen, Nucl. Phys. **B129** (1977) 89.
D. Cohen, Phys. Rev. **D22** (1980) 2595.
A. D. Martin et E. N. Ozmuth, Nucl. Phys. **B158** (1979) 520.
S. J. Lindenbaum et R. S. Longacre, Phys. Lett. **B274** (1992) 492.
P. Estabrooks et A. D. Martin, Nucl. Phys. **B79** (1974) 301.
L. Rosselet *et al.*, Phys. Rev. **D15** (1977) 574.

- A. Schenk, Nucl. Phys. **B363** (1991) 97.
- G. Jansen, B. C. Pearce, K. Holinde et J. Speth, Phys. Rev. **D52** (1995) 2690.
- Amsterdam, CERN, Nijmegen-Oxford Collaboration, Phys. Lett. **B63** (1976) 220.
- S. M. Flatte, Phys. Lett. **B63** (1976) 224.
- R. Mercer *et al.*, Nucl. Phys. **B32** (1971) 381.
- H. H. Bingham *et al.*, Nucl. Phys. **B41** (1972) 1.
- S. L. Baker *et al.*, Nucl. Phys. **B99** (1975) 211.
- P. Estabrooks *et al.*, Nucl. Phys. **B133** (1978) 490.
- R.L. Jaffe, Phys. Rev. **D15** (1977) 267; Phys. Rev. **D15** (1977) 281.
- S. Ishida *et al.*, Prog. Theor. Phys. **98** (1997) 621.
- D. Linglin *et al.*, Nucl. Phys. **B57** (1973) 64.
- [76] U. Meißner et J. A. Oller, accepted by Nucl. Phys. **A**, hep-ph/0005253.
- [77] K. L. Au, D. Morgan et M. R. Pennington, Phys. Rev. **D35** (1987) 1633.
- [78] G. Grayer *et al.*, Nucl. Phys. **B75** (1974) 189.
- A. Etkin *et al.*, Phys. Rev. **D25** (1982) 1786.
- W. Ochs, University of Munich Thesis, 1974.
- N. M. Cason *et al.*, Phys. Rev. **D28** (1983) 1586.
- [79] R. Kaminski, L. Lesniak and J. P. Maillet, Phys. Rev. **D50** (1994) 3145 [hep-ph/9403264].
- R. Kaminski, L. Lesniak et B. Loiseau, Phys. Lett. **B413** (1997) 130 [hep-ph/9707377].
- [80] J. T. Londergan, K. W. McVoy et E. J. Moniz, Ann. Phys. **bf 86** (1974) 147.
- [81] A. A. Belkov *et al.*, Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **29** (1979) 652.
- V. Srinivasan *et al.*, Phys. Rev. **D12** (1975) 681.
- A. J. Pawlicki, D. S. Ayres, D. Cohen, R. Diebold, S. L. Kramer and A. B. Wicklund, Phys. Rev. **D15** (1977) 3196.

- D. Cohen, D. S. Ayres, R. Diebold, S. L. Kramer, A. J. Pawlicki and A. B. Wicklund, Phys. Rev. **D22** (1980) 2595.
P. Estabrooks, Phys. Rev. **D19** (1979) 2678.
- [82] A. Schenk, Nucl. Phys. **B363** (1991) 97.
M. Knecht, B. Moussallam, J. Stern et N. H. Fuchs, Nucl. Phys. **B471** (1996) 445 [hep-ph/9512404].
- [83] B. Hyams *et al.*, Nucl. Phys. **B64** (1973) 134.
P. Estabrooks et A. D. Martin, Nucl. Phys. **B79** (1974) 301.
- [84] E. Braaten, Phys. Rev. **D39** (1989) 1458.
E. Braaten, S. Narison et A. Pich, Nucl. Phys. **B373** (1992) 581.
F. Le Diberder et A. Pich, Phys. Lett. **B289** (1992) 165.
- [85] V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein et V. I. Zakharov, Nucl. Phys. **B191** (1981) 301.
- [86] J. Gasser and H. Leutwyler, Phys. Lett. **B125** (1983) 325.
- [87] J. Gasser and U. G. Meissner, Nucl. Phys. **B357** (1991) 90.
- [88] B. Ananthanarayan, G. Colangelo, J. Gasser and H. Leutwyler, hep-ph/0005297.
G. Colangelo, J. Gasser and H. Leutwyler, Phys. Lett. **B488** (2000) 261 [hep-ph/0007112].
- [89] H. Leutwyler et A. Smilga, Phys. Rev. **D46** (1992) 5607.
- [90] G. 't Hooft, Phys. Lett. **B349**, 491 (1995) [hep-th/9411228].
- [91] J. Gasser et H. Leutwyler, Nucl. Phys. **B307** (1988) 763; Phys. Lett. **184B** (1987) 83; Phys. Lett. **188B** (1987) 477.
- [92] P. Hasenfratz et H. Leutwyler, Nucl. Phys. **B343** (1990) 241.
- [93] A. D. Jackson, M. K. Sener et J. J. Verbaarschot, Phys. Lett. **B387** (1996) 355 [hep-th/9605183].
J. Verbaarschot, hep-th/9710114.
R. Brower, P. Rossi et C. Tan, Nucl. Phys. **B190** (1981) 699.
T. Akuzawa et M. Wadati, J. Phys. Soc. Jap. **67** (1998) 2151 [hep-th/9804049].

- [94] A. Duncan, E. Eichten et H. Thacker, Phys. Rev. **D59** (1999) 014505 [hep-lat/9806020]; Nucl. Phys. Proc. Suppl. **73** (1999) 837 [hep-lat/9809144] et 840 [hep-lat/9809117].
A. Duncan, E. Eichten, R. Roskies et H. Thacker, Phys. Rev. **D60** (1999) 054505 [hep-lat/9902015].
- [95] V. Bernard, N. Kaiser et U. G. Meissner, Phys. Rev. **D43** (1991) 2757, Nucl. Phys. **B357** (1991) 129.
M. Knecht, H. Sazdjian, J. Stern et N. H. Fuchs, Phys. Lett. **B313** (1993) 229 [hep-ph/9305332].
- [96] P. H. Ginsparg et K. G. Wilson, Phys. Rev. **D25** (1982) 2649;
D. B. Kaplan, Phys. Lett. **B288** (1992) 342 [hep-lat/9206013]; Nucl. Phys. Proc. Suppl. **30** (1993) 597.
R. Narayanan et H. Neuberger, Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 3251 [hep-lat/9308011]; Nucl. Phys. **B412** (1994) 574 [hep-lat/9307006]; Nucl. Phys. **B443** (1995) 305 [hep-th/9411108].
Y. Shamir, Nucl. Phys. **B406** (1993) 90 [hep-lat/9303005].
V. Furman et Y. Shamir, Nucl. Phys. **B439** (1995) 54 [hep-lat/9405004].
P. Hasenfratz, Prog. Theor. Phys. Suppl. **131** (1998) 189.
- [97] M. E. Peskin et T. Takeuchi, Phys. Rev. **D46** (1992) 381.
- [98] T. Appelquist, P.S. Rodrigues da Silva et F. Sannino, Phys. Rev. **D60** (1999) [hep-ph/9906555].
T. Appelquist, J. Terning et L.C. Wijewardhana, Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 2767 [hep-ph/9706238].
- [99] A. Nyffeler et A. Schenk, Phys. Rev. **D62** (2000) 036002 [hep-ph/9812437]; hep-ph/9907294.
- [100] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, Frontiers in Physics 74, Addison-Wesley (1989).
- [101] M. Abramowitz et I.A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Dover (1972).
- [102] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling et B.P. Flannery, *Numerical recipes*, Cambridge University Press (1996).

- [103] F. V. Tkachev, Phys. Lett. **B100** (1981) 65.
K. G. Chetyrkin et F. V. Tkachev, Nucl. Phys. **B192** (1981) 159.
- [104] A. I. Davydychev et J. B. Tausk, Nucl. Phys. **B397** (1993) 123.